Név : ______________________________ Neptun kód: __________________

2022/23 Második félév I. Mat. B. Sc. Haladó Web Mintavizsga

Az első feladat egy összesen 15 pontot érő beugró teszt, melyet 30 perc elteltével beszedünk. Minden helyes válasz 1 pontot ér. Akinek nincs legalább 11 pontja, az nem folytathatja a vizsgát. Az összevont pontszámba a teszten elért pontok a következő módon számítanak bele: $3 \cdot$ (tesztpontszám-9).
Azaz, aki mondjuk 13 pontot ér el a beugró teszten, az $3 \cdot (13 - 9) = 12$ pontot visz tovább az összesített vizsgapontszámba.

1. feladat (Kizárólag a sorvégi pontozott vonalra írt válaszokat tudjuk elfogadni. Ha valami aminek a meghatározását kéri a feladat nem létezik akkor írjon N.L-et a pontozott vonalra. Ha egy eldöntendő kérdésre kell válaszolni írjon I-t, ha a válasz igenlő és N-et, ha a válasz nemleges. Ha több alternatíva (A, B, C, stb.) között kell választania, akkor írja be a megfelelő betűjelét a pontozott vonalra.)

1/a Egyenletesen folytonos-e $\mathbb{R}$-en az $f(x) = x^2$ fv.? a..........

1/b Integrálható-e $[0, 1]$-en az $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ ha $x \neq 0$, $f(0) = 0$ fv.? b..........

1/c $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} =?$ c..........

1/d Az egységgömb térfogatát megadja az A) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \pi\sqrt{1 - x^2}dx$;
B) $\displaystyle\pi\int_{-1}^{1} 1 - x^2 dx$; C) $\displaystyle\pi\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{1 - x^2}dx$; D) egyik se. d..........

1/e Ha $\log(1 + x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, akkor $a_3 =?$ A) 3;
B) $\frac{1}{3!}$; C) $\frac{1}{3}$; D) egyik se. e..........

1/f Igaz-e, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \to \frac{1}{1-x}$ egyenletesen $[-0.1, 0.1]$-en? f..........

1/g Ha $f_n(x) = (\frac{1}{x^2+1})^n$, akkor igaz-e, hogy
$\lim_{x\to 0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0} f_n(x)$? g..........

1/h Igaz-e, hogy ha $H \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, akkor mar H is nyílt? h..........

1/i Ha $f((x_1, x_2)^T) = (x_1^2 x_2^3, \cos(x_1 x_2))^T$ és $A = (a_{i,j}) = f'$,
akkor $a_{1,2} =?$ i....................

1/j Igaz-e, hogy ha $\exists\, \nabla f(\mathbf{x})$ akkor $\forall \mathbf{v}$, $||\mathbf{v}|| = 1$-re $\exists\, \partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x})$? j..........

1/k Differenciálható-e az $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$-ben az $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$? k..........

1/l Ha f kétszer diffható (a, b) egy U kzetében akkor
$\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(a + t, b + t) - f(a + t, b) - f(a, b + t) + f(a, b)}{t^2} =?$
A) $\partial_1 f(a, b)$, B) $\partial_1^2 f(a, b)$, C) $\partial_1\partial_2 f(a, b)$, D) egyik sem. l..........

1/m Pozitív definit-e $q((h_1, h_2)^T) = h_1^2$? m..........

1/n Igaz-e, hogy egy kétszer diffható $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény Hesse mátrixában a jobb felső és a bal alsó elem megegyezik? n..........

1/o Ha $k = f(x, y(x))$, f folyt. diffh. és $\partial_y f(x_0, y(x_0)) \neq 0$,
akkor $y'(x_0) =?$ o....................

A 2-4 feladatok megoldásakor minden lépést indokolni kell. Csak indokolt válaszokra, részválaszokra adunk pontot.

Minden feladatot **külön lapra** kell írni. Minden lapra kérem, hogy mindenki írja rá a nevét.

2. feladat

(a)

Mondja ki és bizonyítsa azt a tételt, mely monoton függvények integrálhatóságára vonatkozik!

(5 pont)

(b)

Mondja ki és bizonyítsa a Weierstrass kritériumot (M-tesztet).

(5 pont)

(c)

Tegyük föl, hogy $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz. Definiálja az $f : G \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény első és második differenciálját.

(5 pont)

3. feladat

$\int x \sin(\sqrt{x}) dx = ?$

(10 pont)

4. feladat

(a)

Vezesse le a körszelet és körcikk területére vonatkozó formulákat. Definiálja a polárkoordinátákat és a szektorszerű tartományt. Mondja ki és vezesse le a szektorszerű tartomány területére vonatkozó formulát.

(10 pont)

(b)

Mondja ki és bizonyítsa a kétdimenziós implicitfüggvény tételt.

(10 pont)

Várható pontozás: 0-19 pont elégtelen, 20-29 pont elégséges, 30-39 pont közepes, 40-49 pont jó, 50-63 pont jeles.