$\sum f(nx)$ konvergenciájáról

Buczolich Zoltán*

ELTE TTK Analízis Tanszék
1088 Budapest Rákóczi út 5
email: buczo@cs.elte.hu
http://www.cs.elte.hu/~buczo

1 Köszönetnyilvánítás

Nagy örömmel tettem eleget a Császár Ákos 75. születésnapja alkalmából tartandó előadások egyikének megtartására szóló felkérésnek. Előadásom témája Valós Függvénytan és Mértékelmélet, melynek alapjait Császár Ákos Valós Analízis előadásaiból tanultam meg. Kutató és oktató munkámat pedig az általa irányított Analízis Tanszéken kezdhettem el.

2 Bevezetés

1998 nyarán útban a miskolci dimenzióelmélet konferenciára Dan Mauldin hívta fel a figyelmem a következő kérdésre, mely Heinrich von Weizsäker [W] 1970-ben készült diplomamunkájából származik:

Alapprobléma: Legyen $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ mérhető függvény. Igaz-e, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} f(nx)$ vagy majdnem mindenütt konvergens, vagy majdnem mindenütt divergens?

Mivel kizárólagosan a Lebesgue mértékkel foglalkozunk, így mérhető alatt Lebesgue mérhetőt értünk, és az A halmaz Lebesgue mértékét $|A|$-val fogjuk jelölni. Kicsit pongyolán az alapprobléma úgy is megfogalmazható, hogy vajon érvényes-e a $\sum f(nx)$ sorra a nulla-egy törvény.

Mielőtt megválaszolnánk az alapproblémát röviden összefoglaljuk annak történetét.

Az American Mathematical Monthlyban jelent meg 1957-ben a K. L. Chung által kitűzött következő:

*Készült az FKFP 0192/1999 pályázat támogatásával.

Feladat [FH]: Ha $f \in C[0,\infty)$, $f \geq 0$, és $\int_0^\infty f(x)dx = \infty$ akkor mutassuk meg, hogy található $x > 0$, melyre $\sum_{n=1}^\infty f(nx) = \infty$!

Azt nem nehéz belátni (ld. pl. [W]), hogy ha $\int_0^\infty f(x)dx < \infty$, akkor $\sum_{n=1}^\infty f(nx) < \infty$ majdnem mindenütt.

Az alapprobléma nem csak H. v. Weizsäcker diplomamunkájában, hanem J. A. Haight egy cikkében [H1] is felmerült. Úgy tűnik, hogy e kérdés 1970-ben a "levegőben lógott" hiszen tudomásom szerint Weizsäcker nem tudott Haight cikkéről. A [H1] cikk fő eredménye annak megmutatása, hogy létezik olyan végtelen mértékű $H \subset (0,\infty)$ halmaz, melyre minden $x, y \in H$, $x \neq y$ számra x/y nem egész, továbbá
$*$ minden $x > 0$-ra $nx \notin H$ ha n elég nagy.
Ez utóbbi tulajdonságból következik, hogy ha $f = \chi_H$, a H halmaz karakterisztikus függvénye, akkor $\int_0^\infty f(x)dx = \infty$ és $\sum_{n=1}^\infty f(nx) < \infty$ majdnem mindenütt.

A $*$-gal jelölt tulajdonságú halmazokkal már Lekkerkerker is foglalkozott 1958-as [L] dolgozatában.

Haight az alapprobléma következő speciális esetét fogalmazta meg:

Kérdés: Ha f valamely $A \subset (0,\infty)$ mérhető halmaz karakterisztikus függvénye, akkor az alapproblémára mi a válasz?

Igen érdekes a periodikus függvényekre vonatkozó problémakör története is. Arról az esetről van tehát szó, amikor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodikus mérhető függvény és az általánosság megszorítása nélkül föltesszük, hogy periódusa $p = 1$.

Ha a megfelelő sor helyett csak az $f(nx)$ sorozatot tekintjük, akkor Mazur és Orlicz [MO] 1940-ben bebizonyították, hogy majdnem minden x-re

$$\limsup_{n\to\infty} f(nx) = \operatorname{ess\,sup} f.$$

Ez a tulajdonság érvényben marad akkor is, ha az (n) sorozat helyett tetszőleges (λ_n) végtelenhez konvergáló sorozatot veszünk.

Ebből az eredményből már következik, hogy ha f valamely pozitív mértékű, 1 szerint periodikus halmaz karakterisztikus függvénye, akkor majdnem minden x-re $\sum_n f(nx) = \infty$ így a periodikus esetben érvényes a nulla-egy törvény.

Sokkal érdekesebb tehát a részletösszegek számtani közepeiből képzett sor (Cesàro 1 közepek) konvergenciáját vizsgálni. Erre vonatkozik a

Hincsin sejtés [H] (1923): Tegyük föl, hogy $E \subset (0,1)$ mérhető halmaz és $f(x) = \chi_E(\{x\})$, ahol $\{x\}$ az x törtrészét jelöli. Igaz-e, hogy majdnem minden x-re

$$\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} f(nx) \to |E|?$$

H. Weyl [We] egy 1916-os cikke nyomán ismeretes volt, hogy a Hincsin sejtés igaz ha f Riemann integrálható.

Raikov [Ra] (1936), illetve Riesz [Ri] (1945) megmutatták, hogy ha az 1 szerint periodikus f függvény $[0,1]$-en Lebesgue integrálható, akkor tetszőleges $q > 1$ egész számra

$$\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} f(q^n x) \to |E|$$

teljesül majdnem minden x-re.
Erdős [E] 1949-ben viszont bebizonyította, hogy található olyan $a_n \to \infty$ sorozat és f $L^1(0,1)$-beli függvény, hogy

$$\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} f(a_n x) \to |E|$$

nem teljesül majdnem minden x-re.
Végül 1969-ben Marstrand [M] megmutatta, hogy nem igaz a Hincsin sejtés.

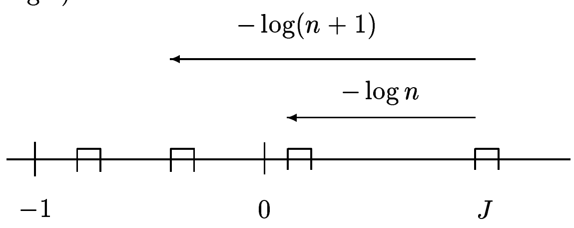
3 Az Alapprobléma Megoldása

1998-ban D. Mauldinnal közös cikkünkben [BM] sikerült megmutatni, hogy az alapproblémára a Hincsin sejtéshez hasonlóan negatív a válasz.

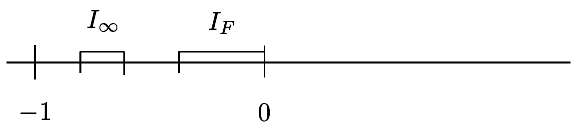
3.1 Tétel: *Található olyan mérhető $f : (0,+\infty) \to \{0,1\}$ függvény és két intervallum J_F, $J_\infty \subset [\frac{1}{2}, 1)$, hogy minden $x \in J_\infty$-re $\sum_{n=1}^{\infty} f(nx) = +\infty$ és majdnem minden $x \in J_F$-re $\sum_{n=1}^{\infty} f(nx) < +\infty$.*
Az f függvény választható egy nyílt halmaz karakterisztikus függvényének.

A fenti tétel tehát Haight kérdésére is választ ad. A bizonyítás pontos részletei megtalálhatóak a [BM] cikkben, jelen előadásban csak a bizonyítás alapötletét vázoljuk.

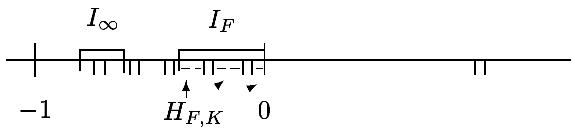
Bizonyítás (vázlat): A továbbiakban log-gal a *kettes* alapú logaritmust fogjuk jelölni. Nyilván $\sum_{n=1}^{\infty} f(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} f(2^{\log x + \log n})$ azaz (átjelölve) elég a $\sum_{n=1}^{\infty} f(x + \log n)$ sor konvergencia tulajdonságait vizsgálni a $[-1,0] = [\log\frac{1}{2}, \log 1]$ intervallumon.
Konstrukciónkban $f = \chi_E$ lesz, ahol $E \subset \mathbb{R}$ olyan nyílt halmaz, mely megszámlálható sok E_j $(j = 1, \ldots)$ "blokk" uniója. Egy-egy E_j blokk véges sok "lokálisan egyenletesen elhelyezett" nyílt intervallumból fog állni.
A következő ábrán egy darab J építőkő intervallumot tekintünk. Ennek $\log n$-nel visszatolt képeihez tartozó x-ek esetén $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_J(x + \log n) = 1$ egyébként $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_J(x + \log n) = 0$.



Nem szabad azonban elfeledkeznünk az $I_F = \log J_F$ és az $I_\infty = \log J_\infty$ intervallumokról:



f-et, mint az $E = \cup E_j$, halmaz karakterisztikus függvényét szeretnénk definiálni úgy, hogy $\sum f(x+\log n) < \infty$ teljesüljön I_F-en és $\sum f(x+\log n) = \infty$ I_∞-en.



Legyen

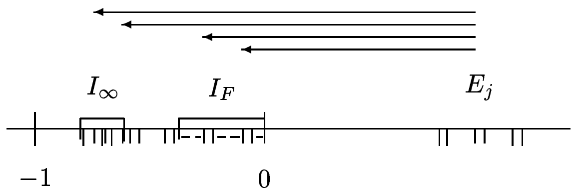
$$H_F = \{x \in (-1,0] : \sum_{n=1}^{\infty} f(x+\log n) < \infty\}$$

és

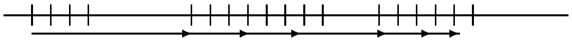
$$H_{F,K} = \{x \in (-1,0] : \sum_{n=K}^{\infty} f(x+\log n) = 0\}.$$

Ha $f(x) \neq 0$, akkor $f(x) = 1$, így minden $x \in H_F$-hez található K_x, hogy minden $K > K_x$-re $x \in H_{F,K}$. Tehát $|H_{F,K}| \to |H_F|$. Ez okozza az igazi nehézséget, hiszen így nagy K értékekre a $H_{F,K}$ halmaz szinte teljesen kitölti I_F-et. Ha például egy J építőkő intervallumot tekintünk, akkor a $\log n$-nel $(n \geq K)$ visszatolt képeinek el kell kerülniük a $H_{F,K}$ halmazt, azaz I_F-en belül nincs sok hely e visszatolt képek számára. Másrészt ha $x \in I_\infty$ akkor végtelen sokszor hozzá kell tartoznia valamely J intervallum visszatolt képéhez. Ez az a két egymással szembenálló feltétel, melyet valahogy egyidejűleg kell teljesítenünk.

Nyilván ha csak egy J intervallumot veszünk, akkor a visszatolt képek nem fedik le I_∞-t. Építsünk tehát több intervallumból egy E_j blokkot! Arra kell azonban vigyáznunk, hogy I_F-ben valamennyi intervallum $\log n$-ekkel visszatolt képe $H_{F,K}$ komplementerében maradjon (tehát része legyen valamilyen kis mértékű halmaznak), de a visszatolt képek mégis fedjék le I_∞-t.



Láttunk-e valahol hasonló problémát?



A fenti ábrán egy "kis-intervallumhossz" legyen egységnyi. Próbáljuk meg azt elérni, hogy $\log n$ közel essen $\mathbb{Z}$-hez sok n-re, mondjuk ha $n \in \Gamma_1$, de egy másik Γ_2 halmazbeli $\log n$-ek "viszonylag egyenletesen" töltsék ki mod 1 az egységintervallumot. Pontosabban megfogalmazva, ha $||.||$-val a $\mathbb{Z}$-től (az egészektől) vett távolságot jelöljük, akkor valamely alkalmasan választott $\epsilon_j > 0$ számhoz olyan q-t szeretnénk találni, melyre

$$||q \log n|| < \epsilon_j, \ \ (n \in \Gamma_1)$$

és

$$\forall\, k = 1, ..., 2^j, \ \exists p_k \in \Gamma_2 \ \ ||q \log p_k - \frac{k}{2^j}|| < \epsilon_j.$$

Ez a probléma már ismerős:
Inhomogén szimultán diofantikus approximáció! Így elég felidéznünk a következő eredményt [C, 53. old.]:

Kronecker-tétele: *Tegyük föl, hogy* $\theta_1, ..., \theta_L \in \mathbb{R}$ *és* $(\alpha_1, ..., \alpha_L) \in \mathbb{R}^L$. *Ekkor a következő két állítás ekvivalens:*
A) Minden $\epsilon > 0$*-hoz található* $q \in \mathbb{Z}$, *hogy*

$$||q\theta_k - \alpha_k|| < \epsilon, \forall 1 \le k \le L.$$

B) Ha $(u_1, ..., u_L) \in \mathbb{Z}^L$ *és*

$$u_1\theta_1 + ... + u_L\theta_L \in \mathbb{Z},$$

akkor

$$u_1\alpha_1 + ... + u_L\alpha_L \in \mathbb{Z}.$$

A mi esetünkben valamilyen nagy $\nu \in \mathbb{N}$ esetén $\Gamma_1 = \mathbb{Z} \cap [(7/8)2^\nu, (9/8)2^\nu]$-et kell választanunk és Γ_2 2^j darab olyan p_k prímszámból fog állni, melyekre $\frac{23}{16}2^\nu < p_k < \frac{24}{16}2^\nu$.

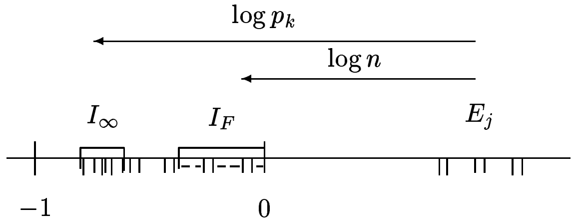
A Nagy Prímszámtétel szerint van elegendően sok prím, így minden rögzített j-re elegendően nagy ν-k esetén megválaszthatóak a Γ_1 és Γ_2 halmazok.

Ezután $\alpha = 0$-t választva a Γ_1-beli számokhoz, és $\alpha = k/2^j$-t választva a Γ_2-beli számokhoz tetszőleges rögzített $\epsilon_j > 0$-ra a Kronecker tétel alkalmazható. Tehát alkalmas q számra $q \log n$ közel van $\mathbb{Z}$-hez ha $n \in \Gamma_1$ és $q \log p_k$ $(p_k \in \Gamma_2)$ közel van $\mathbb{Z} + k/2^j$-hez.

Ezt a q számot használva most már definiálhatjuk az E_j blokkot. Mivel az eredeti intervallumaink korlátosak voltak, így a diofantikus approximációs eredményt $1/q$ arányban "kicsinyítenünk" kell:

$$E_j \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in (\log \frac{8}{9} + \nu, \nu) : \operatorname{dist}(x, (1/q)\mathbb{Z}) < \frac{1}{q2^j}\}.$$

$\epsilon_j = \frac{1}{4 \cdot 2^j}$ választás esetén $E_j \subset (\nu - 1, \nu)$ olyan nyílt halmaz lesz, melyre $\sum_n \chi_{E_j}(x + \log n) \geq 1$ fog teljesülni ha $x \in I_\infty$ és $\sum_n \chi_{E_j}(x + \log n) = 0$ lesz I_F-en egy kis mértékű kivételes halmaztól eltekintve.



A fenti lépéseket ismételve kapható a kívánt $f = \chi_E$ függvény. $\square$

4 Az 1998-as Schweitzer verseny 4. feladata

Császár Ákos, mint a Bolyai János Matematikai Társulat elnöke számos fontos feladatnak tett eleget, ezen feladatok között volt a Schweitzer Miklós emlékverseny versenybizottságának elnöksége. Akkoriban amikor egyetemi hallgató voltam ez úgy tudatosult bennünk, hogy mindig ő osztotta a verseny kezdetén a feladatlapokat.

1998-ban már nem mint versenyző, hanem mint feladatkitűző vettem részt a versenyben. Az előbb tárgyalt probléma megoldása során felmerülő egyik "bemelegítő feladatot" adtam fel.

1998-as Schweitzer Miklós verseny 4. feladat:
Tetszőleges $H \subset \mathbb{R}$ mérhető halmazra definiáljuk az (a_n) sorozatot az

$$a_n = a_n(H) = \lambda\left([0,1] \setminus \cup_{k=n}^{2n}(H + \log_2 k)\right)$$

formulával, ahol λ a Lebesgue mértéket jelöli. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan mérhető, 1 szerint periodikus, nem nulla mértékű $H \subset \mathbb{R}$ halmaz, melyre az $a_n(H)$ sorozat egyetlen ℓ_p térhez sem tartozik $(1 \leq p < \infty)$.

Megjegyzés: A feladat sok szempontból általánosítható például a $\log_2 k$ sorozat helyett tetszőleges végtelenhez konvergáló sorozatot is megengedhetnénk, illetve az $a_n(H)$ nullához tartásának sebessége tetszőlegesen lassítható. Ha az ember már tudja a diofantikus approximáció korábban tárgyalt mértékelméleti alkalmazását, akkor már nem nehéz rájönni a megoldásra, illetve annak általánosításaira.

Megoldás: Legyen $1 \leq p < \infty$ és $N_1 < N_2 < \ldots$ az $\mathbb{N}$ olyan monoton részsorozata, amelyre

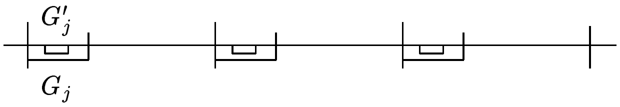
$$(*) \qquad (N_j - N_{j-1})3^{-j^2} > 1.$$

Kronecker tételében a B) feltétel mindig teljesül a homogén esetben, azaz akkor, amikor valamennyi $\alpha_k = 0$. A megfelelő homogén szimultán approximációs feladat tehát mindig megoldható és így található $q_j \in \mathbb{N}$ (a Kronecker tétel $q_j \in \mathbb{Z}$-t ad, de nem nehéz $q_j \in \mathbb{N}$-et találni), melyre

$$||q_j \log k|| < \frac{3^{-j}}{4} \quad \forall k = N_{j-1}, \ldots, 2N_j.$$

Legyen tehát

$$G_j \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \left(\frac{m}{q_j}, \frac{m + 3^{-j}}{q_j}\right) \quad \text{és} \quad H \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \setminus \cup_{j=1}^{\infty} G_j$$



Ekkor könnyen látható, hogy

$$G_j + \log k \supset \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \left(\frac{m + \frac{3^{-j}}{4}}{q_j}, \frac{m + \frac{3 \cdot 3^{-j}}{4}}{q_j}\right) \stackrel{\text{def}}{=} G'_j$$

teljesül $k = N_{j-1}, \ldots, 2N_j$-re.

Így ha $N_{j-1} < n \leq N_j$ akkor

$$G'_j \cap [0,1] \subset [0,1] \setminus \cup_{k=n}^{2n} (H + \log k).$$

Tehát a fenti n-ekre $a_n \geq 3^{-j}/2$ és ha $j > p$ akkor $a_n^p > 3^{-jp} > 3^{-j^2}$. Ebből már $(*)$ alapján következik, hogy $\sum_{N_{j-1} < n \leq N_j} a_n^p > 1$ és így $(a_n) \notin \ell_p$. $\square$

5 Az Alapprobléma Általánosítása

1975-ben J. A. Haight a [H2] cikkben az 1970-es [H1] cikk általánosításait vizsgálta. Megmutatta, hogy tetszőleges $\Lambda \subset [0, +\infty)$ megszámlálható és csak a $+\infty$-hez torlódó halmazhoz található olyan végtelen mértékű, mérhető $E \subset \mathbb{R}^+$ halmaz, hogy minden $x, y \in E$-re $x/y \notin \Lambda$, továbbá rögzített x-re csak véges sok olyan $\lambda \in \Lambda$ található, melyre $\lambda x \in E$. Ebből következik, hogy $f = \chi_E$ választása esetén $\sum_{\lambda \in \Lambda} f(\lambda x) < \infty$, de nyilván $\int_{\mathbb{R}^+} f(x)dx = \infty$.

A mi kicsit módosított megközelítésünkben az alapproblémát a következő módon általánosíthatjuk:

Adott $\Lambda \subset [0, \infty)$ diszkrét halmaz esetén az

$$s(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda \in \Lambda} f(x + \lambda)$$

sorra teljesül-e a nulla-egy törvény, azaz tetszőleges $f \geq 0$ mérhető függvényre igaz-e, hogy a sor vagy majdnem mindenütt konvergál, vagy majdnem mindenütt divergál?

E a probléma motiválta a J-P. Kahane-nal és D. Mauldinnal közös [BKM] cikkünket. A következőkben felsorolunk néhány eredményt.

Legyen $C = C(f, \Lambda) = \{x : s(x) < \infty\}$, valamint $D = D(f, \Lambda) = \{x : s(x) = \infty\}$.

5.1 Állítás: *Tetszőleges $f \geq 0$ mérhető függvényhez található olyan $g \geq 0$ folytonos, ∞-ben 0-hoz tartó ($g \in C_0^+(\mathbb{R})$) függvény, melyre $C(f, \Lambda) = C(g, \Lambda)$ majdnem mindenütt és $D(f, \Lambda) = D(g, \Lambda)$ majdenem mindenütt.*

Tehát ha minket csak a nulla-egy törvény érdekel akkor elegendő $C_0^+(\mathbb{R})$-beli függvényekkel foglalkozni.

Definíció: A Λ halmaz *1-es típusú,* ha tetszőleges mérhető f-re, vagy $C(f, \Lambda) = \mathbb{R}$ majdnem mindenütt, vagy $C(f, \Lambda) = \emptyset$ majdnem mindenütt (azaz teljesül Λ-ra a nulla-egy törvény). Egyébként Λ *2-es típusú.*

A következő tétel a 3.1 Tétel pontosítása, bizonyítása J-P. Kahane javaslatára nem diofantikus approximáción, hanem harmonikus analízisen, majdnem periodikus függvényeken alapul.

5.2 Tétel: *A $\Lambda = \{\log n : n = 1, 2, \ldots\}$ halmaz 2-es típusú. Továbbá található olyan f $C_0^+(\mathbb{R})$-beli függvény, melyre C teljes mértékű a $(0, \infty)$ félegyenesen és D tartalmazza a $(-\infty, 0)$ félegyenest. Másrészt, ha C valamely $g \in C_0^+(\mathbb{R})$ függvényre tartalmaz egy intervallumot, akkor $C = \mathbb{R}$ majdnem mindenütt.*

Mielőtt még azt gondolnánk, hogy csak 2-es típusú halmazok léteznek a következő példában egy 1-es típusú halmazra adunk példát:

Példa: Ha $\Lambda_k = 2^{-k}\mathbb{N} \cap [2^k, 2^{k+1})$ és $\Lambda = \cup_{k \in \mathbb{N}} \Lambda_k$, akkor Λ 1-es típusú.

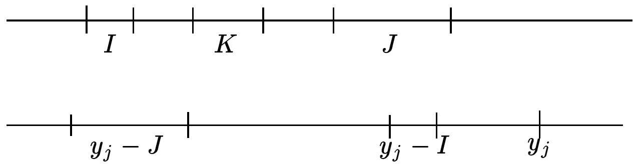
Ezt a példát kicsit általánosabban is megfogalmazhatjuk:

5.3 Tétel: *Legyen (n_k) a természetes számok tetszőleges szigorúan monoton növekvő sorozata $\Lambda_k = 2^{-k}\mathbb{N} \cap [n_k, n_{k+1})$ és $\Lambda = \cup_{k \in \mathbb{N}} \Lambda_k$. Ekkor Λ 1-es típusú.*

A 2-es típusú halmazokról a 3.1 és az 5.2 Tételek bizonyításának gondolatmenete alapján azt gondolnánk, hogy "sok", a racionális számtest fölött független elemet kell tartalmazniuk. Ez azonban nincs így, a következő tétel szerint már a diadikus racionális számok egy alkalmas részhalmaza is lehet 2-es típusú.

5.4 Tétel. *Tegyük föl, hogy $(m(k))$ természetes számok egy tetszőleges, (n_k) pedig egy szigorúan monoton növekvő részsorozata $\Lambda_k = 2^{-m(k)}\mathbb{N} \cap [n_k, n_{k+1})$ és $\Lambda = \cup_{k\in\mathbb{N}}\Lambda_k$. Ekkor megválasztható az $(m(k))$ sorozat úgy, hogy Λ 2-es típusú és $m(k) \to \infty$.*

A következő tétel tartalmazza azt a függetlenségen alapuló feltételt, mely elegendő ahhoz, hogy egy Λ halmaz 2-es típusú legyen.



5.5 Tétel: *Tegyük föl, hogy létezik három intervallum I, J, K, melyekre $J = K + I - I$ (itt algebrai, komplexus összegről van szó), I a J-től balra helyezkedik el és dist$(I, J) \geq |I|$ (ahol dist(I, J)-vel az I és J intervallumok egymástól vett távolságát jelöltük).*

Tegyük föl továbbá, hogy található két végtelenhez tartó sorozat: (y_j) és (N_j) ($y_j \in \mathbb{R}^+$, $N_j \in \mathbb{N}$), hogy minden j-re $y_j - I$ legalább N_j olyan Λ-beli pontot tartalmaz, melyek nem állnak elő $\Lambda \cap (y_j - J)$-beli pontok racionális együtthatós lineáris kombinációjaként. Ekkor Λ 2-es típusú.
Ezenkívül található olyan $f \in C_0^+(\mathbb{R})$ függvény, melyre $D(f, \Lambda)$ tartalmazza I-t és $C(f, \Lambda)$ teljes mértékű K-n.

A fenti függetlenségi feltételen kívül egy egyszerű hézagossági feltétel is elegendő ahhoz, hogy egy halmaz 2-es típusú legyen.

Definíció: Azt mondjuk, hogy Λ *aszimptotikus sűrűsége* végtelen, ha minden $a > 0$-ra

$$\lim_{x\to\infty} \#(\Lambda \cap [x, x + a]) = \infty$$

teljesül. Ha Λ nem végtelen aszimptotikus sűrűségű, akkor azt mondjuk, hogy *aszimptotikusan hézagos.*

5.6 Tétel: *Az aszimptotikusan hézagos Λ halmazok 2-es típusúak.*

Megjegyezzük, hogy az 5.3-4 Tételekben szereplő példák aszimptotikusan sűrű halmazokra vonatkoztak.

Végül megemlítjük, hogy az 5.3 Tétel bizonyításához egy önmagában is érdekes lemmát kellett megfogalmaznunk.

Legyen $\mathbb{T}$ az egységkör, és a rajta értelmezett függvényeket azonosítsuk az 1 szerint periodikus függvényekkel. Ekkor teljesül a következő:

Lemma: *Tegyük föl, hogy $\varphi_n : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ nem negatív mérhető függvények. Ha majdnem mindenütt $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(2^n t) < \infty$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(2^n t + \frac{1}{2}) < \infty$ is teljesül majdnem mindenütt.*

Hivatkozások

[BKM] Z. Buczolich, J-P. Kahane és R.D. Mauldin, On series of translates of positive functions, (megjelenés alatt).

[BM] Z. Buczolich és R.D. Mauldin, On the convergence of $\sum f(nx)$ for measurable functions, *Mathematika,* (megjelenés alatt).

[C] J.W.S. Cassels, *An Introduction to Diophantine Approximation*, Cambridge University Press, 1957.

[E] P. Erdős, On the strong law of large numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **67** (1949) 51-56.

[FH] N.J. Fine és A.R. Hyde, Solution of a problem proposed by K.L. Chung, *Amer. Math. Monthly* **64** (1957), 119-120.

[H1] J.A. Haight, A linear set of infinite measure with no two points having integral ratio, *Mathematika* **17** (1970), 133-138.

[H2] J.A. Haight, A set of infinite measure whose ratio set does not contain a given sequence, *Mathematika* **22** (1975), 195-201.

[H] A. Hincsin (A. Khinchin), Ein Satz über Kettenbruche mit arithmetischen Anwendungen, *Math. Zeit.,* **18** (1923) 289-306.

[L] C. G. Lekkerkerker, Lattice points in unbounded point sets, I. *Indag. Math.,* **20** (1958) 197-205.

[M] J. M. Marstrand, On Khinchin's conjecture about strong uniform distribution, *Proc. London Math. Soc.* **3** 21 (1970) 540-56.

[MO] S. Mazur és W. Orlicz, Sur quelques propriétés de fonctions périodiques et presque-périodiques, *Studia Math.* **9** (1940), 1-16.

[Ra] D. A. Raikov, On some arithmetical properties of summable functions, *Mat. Sb.* **1** (43) (1936) 377-84.

[Ri] F. Riesz, Sur la théorie ergodique, *Comment. Math. Helv.* **17** (1945) 221-39.

[We] H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen modulo Eins, *Math. Ann.* **77** (1916) 313-52.

[W] H. v. Weizsäcker, *Zum Konvergenzverhalten der Reihe* $\Sigma_{n=1}^{\infty} f(nt)$ *für* λ*-messbare Funktionen* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, Diplomarbeit, Universität München, 1970.