MTA Doktori Értekezés Tézisei

Geometric and Dynamical Aspects of Measure Theory

Buczolich Zoltán*

Budapest, 2006

*A Doktori Értekezés a Nemzeti Kutatási és Technológia Hivatal támogatásával jött létre, amely támogatás forrása a Kutatási és Technológiai Innovációs Alap.

1. Kitűzött kutatási feladat

Az értekezésben érdeklődési és kutatási területemnek megfelelően, geometriai mértékelmélethez és dinamikus rendszerekhez kapcsolódó problémákat tárgyalok. Az egyes fejezetek anyagán lemérhető matematikai ízlésem/érdeklődésem változása, azonban az egyes fejezetek anyaga logikai-heurisztikus gondolati láncot alkot.

A kandidátusi fokozatom megszerzése idején a 80-as évek végén hallott problémák közül kettő kiemelkedő fontosságú értekezésem szempontjából. Az egyik W. F. Pfeffer Reguláris Speciális Felosztások létezésére vonatkozó problémája volt. A másik C. E. Weil gradiensproblémája.

A Reguláris Speciális Felosztások létezésére vonatkozó problémát néhány hónap alatt sikerült megoldanom (erről szól az értekezésem első fejezetének első fele). E probléma sikeres megoldásának hatására kaptam oktatói és kutatói meghívást másfél évre a University of California, Davis-re, és ekkor kezdődött a W. F. Pfeffer-rel közös kutatómunkám, mely számos cikket eredményezett, az érdeklődő olvasó a [11] konferencia anyagban megtalálhatja a részleteket. Mivel a doktori értekezésem nem általánosított integrálokról szól, így e cikkek zömét nem tárgyalom. A W. F. Pfefferrel közös kutatómunka során a szereposztás gyakran az volt, hogy ő volt az általánosított integrálok fejlesztésének „főideológusa” és amikor megakadt valamilyen geometriai mértékelmélethez kapcsolódó problémán akkor megkérdezett, hogy tudok-e segíteni. Gyakran előfordult, hogy tudtam. Az első fejezet második felében egy ilyen további problémát tárgyalok, mely egy jól ismert topológiai/dimenzióelméleti ténynek - Brouwer Tartomány Invarianciájára vonatkozó tételének - adja egy geometriai mértékelméleti variánsát.

A második fejezet első felében mérhető, de (Lebesgue szerint) nem integrálható függvények független forgatásoknál vett ergodikus közepeinek konvergenciáját vizsgálom. E kérdéskör mögötti motíváció még az első fejezethez, és általánosított integrálokhoz kapcsolódik, de másik motívumként megjelenik a majdnem mindenütt konvergenciához, ergodelmélethez és dinamikus rendszerekhez kapcsolódó terület is. A második fejezet második felében egyparaméteres, egydimenziós dinamikus rendszercsaláddal - a sátor függvénycsaláddal - foglalkozom. E fejezetrész K. M. Bruckszal közös [5] cikkemre épül és K. M. Brucks és M. Misiurewicz egy korábbi eredményét élesíti. Megmutatjuk, hogy bizonyos „rossz paraméterértékek” kivételes halmaza σ-porózus, ami élesítése annak, hogy Lebesgue szerint nullmértékű. Ezen a cikken, különösen a bizonyítás egyes részletein való munka, jelentős heurisztikus és technikai segítséget nyújtott számomra az értekezésem negyedik fejezetében tárgyalt gradiensprobléma megoldásához.

A második fejezet eredményeiről tartottam előadást egy miskolci konferencián, amin R. D. Mauldin is ott volt. Ő javasolta, hogy ha érdekeltek a második fejezetben említett problémák, akkor kezdjek el dolgozni a Haight–Weizsäcker problémán is. Erről és az ehhez kapcsolódó kutatásokról szól az értekezés harmadik fejezete. Röviden megfogalmazva a Haight–Weizsäcker probléma a következő: Tegyük föl, hogy $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mérhető függvény. Igaz-e, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} f(nx)$ Lebesgue majdnem mindenütt konvergens, vagy majdnem mindenütt divergens, azaz teljesül-e nulla-egy törvény $\sum f(nx)$-re. R. D. Mauldinnal közös [23] cikkben megmutattuk, hogy vannak olyan ellenpéldafüggvények, melyekre nem teljesül a nulla-egy törvény. A Haight–Weizsäcker probléma J-P. Kahane kedvenc problémái között is szerepelt, így hamarosan ő is bekapcsolódott a kutatómunkába és a vele, valamint R. D. Mauldinnal közös [21] és [22] cikkek anyaga is megtalálható ebben a fejezetben, valamint még egy R. D. Mauldinnal közös cikké.

Az értekezés negyedik fejezetében a gradiensproblémát és a megoldásához vezető utat tárgyalom. Mivel a gradiensprobléma megoldása tizenöt évig tartott, ezért „útközben” több kapcsolódó és részeredményt értem el. Ezek a tételek adják a negyedik fejezet első felét, míg a negyedik fejezet második felében vázolom a gradiensprobléma megoldását.

Az doktori értekezésem angol nyelvű, úgynevezett „rövid értekezés”, a bizonyítások részletei az értekezés mellékeltében lévő tizennégy cikkben találhatók meg. (E tézisek hivatkozáslistáján „Supplement” jelöli ezeket a cikkeket.)

2. Vizsgálati Módszerek

Az első fejezetben a Reguláris Speciális Felosztások létezésének megmutatása egy trükkös kompaktsági érvelés, amiben a kétdimenziós problémát egydimenziósra vezetem vissza. Az első fejezet második felében a mértékelméleti tételt egy indirekt bizonyítás során határátmenettel egy topológiai tételre (Brouwernek az előző részben említett tételére) vezetem vissza.

A második fejezet első felében a forgatásokra vonatkozó ergodikus átlagok vizsgálata során harmonikus analízist, direkt analízisbeli konstrukciókat és a Rokhlin lemma szabad $\mathbb{Z}^2$ hatásokra vonatkozó általánosítását használom. A második fejezet második felében „Kneading Theory”, Hofbauer tornyok és vágási idők játszanak jelentős szerepet a mértékelméleti érvelésben.

A harmadik fejezetbeli eredmények szimultán inhomogén diofantikus approximációhoz kapcsolódnak Kronecker tételén keresztül. Ezenkívül valamennyi harmonikus analízishez, Sidon halmazokhoz és Riesz típusú szorzatokhoz kapcsolódó érvelés.

A negyedik fejezetben a Geometriai Mértékelmélet fegyvertára (pl. (Hausdorff) mérték becslés, Coarea Formula) ötvöződik klasszikus Valós Analízisbeli (pl. Baire kategóriatételre építő érvelés, Denjoy-Young-Saks tétel), konvexitási, topológiai, komplex függvénytani eszközökkel. Továbbá, mint ezt már az első részben említettem, a gradiensprobléma megoldásának heurisztikus motívációi között szerepelnek dinamikus rendszerekből illetve valószínűségszámításból (pl. megállási idők) származó gondolatok is.

3. Új tudományos eredmények és azok alkalmazásai

Mivel az értekezésemben tárgyalt eredmények elméleti alapkutatás jellegűek, így azokat alapvetően más matematikusok tudják alkalmazni. Ezen lehetséges alkalmazások egy részét e tézisekben, illetve az értekezésben is említem. Problémamegoldóként gyakran „rendelésre dolgoztam”, azaz mások által felvetett problémákat oldottam meg, illetve fejlesztettem ki új bizonyítási módszereket, amiket később az adott elméletet fejlesztő kollégák felhasználtak. Az általam tárgyalt ilyen eredmények az adott elmélet fejlődését befolyásolták, a tételeim bekerültek a megfelelő monográfiákba, illetve kézikönyvekbe.

Az első fejezet első felében W. F. Pfeffer Reguláris Speciális Felosztásokra vonatkozó kérdésével foglalkoztam.

Intervallum alatt $\mathbb{R}^2$-beli zárt téglalapokat értünk. A $P = \{(A_i, x_i)\}_{i=1}^p$ rendszert az A *felosztásának* nevezzük ha az A_i intervallumok egymásba nem nyúlóak, uniójuk A és $x_i \in A_i$ teljesül minden i-re. $B(x, r)$-rel az x pont körüli r sugarú nyílt gömböt jelöljük. $\delta : A \to (0, \infty)$ úgynevezett „gage függvény”. A P felosztás *δ-nál finomabb* ha $A_i \subset B(x_i, \delta(x_i))$ teljesül minden i-re.

Magasabb dimenziós problémák esetén gyakran szükség van a fellépő téglák, intervallumok alakjának megadott határértékek között tartására, azaz ki kell zárnunk a nagyon „lapos”, vagy nagyon „keskeny” alakzatokat. Egy m-dimenziós intervallum (zárt tégla) *regularitási száma* a legrövidebb és leghosszabb oldalának hányadosa. Egy intervallumot r-regulárisnak nevezünk ha regularitási száma nem kisebb, mint r. Rögzített $r > 0$ esetén a Henstock–Kurzweil-integrál definíciójában r-reguláris partíciókat megengedve könnyen definiálhatunk „reguláris” magasabb dimenziós integrálokat. Azonban ezekre az egyszerű általánosításokra nem teljesül az integrál additivitási tulajdonsága. Nem túlságosan nehéz példát adni (ld. [50]), olyan $C \subset \mathbb{R}^m$ intervallumra, mely az A és B egymásba nem nyúló intervallumok uniója és olyan $f : C \to \mathbb{R}$ függvényre, hogy a fenti „reguláris” integrálokat használva létezik $\int_A f$ és $\int_B f$, de nem létezik $\int_C f$. W. F. Pfeffer az [50] dolgozatban e probléma elkerülésére azt javasolta, hogy az integrál definíciójában csak *speciális felosztásokra* kellene szorítkozni, azaz olyan $P = \{(A_i, x_i)\}$ felosztásokra, melyekre minden i-re az x_i pont az A_i intervallum egyik *csúcsa.* Ha r-reguláris speciális felosztásokat engedünk meg az integrál definíciójában, akkor a kapott integrál valóban additív lesz, azonban felmerül egy új probléma: adott $\delta : A \to (0, \infty)$ gage függvény és $r > 0$ regularitási állandó esetén vajon létezik-e az A intervallumnak δ-nál finomabb, r-reguláris, speciális felosztása? E problémára [7]-ben kétdimenziós, síkbeli felosztások esetén pozitív választ adtunk.

1. Tétel. *Tetszőleges $A \subset \mathbb{R}^2$ téglalap és $r \geq 1/1000 > 0$ állandó esetén minden $\delta : A \to (0, \infty)$ gage függvényhez található A-nak δ-nál finomabb, r-reguláris, speciális felosztása.*

Speciális felosztások fenti értelemben vett létezése kettőnél magasabb dimenziós terekben megoldatlan probléma. A többdimenziós integrálási eljárások tárgyalása során a későbbiekben a speciális felosztások nem bizonyultak olyan hasznosnak, mint amilyennek kezdetben tűntek. Azonban kiderült, hogy a speciális felosztások kapcsolatban állnak/állhatnak harmonikus analízisbeli problémákkal, így H. Fejzić, C. Freiling és D. Rinne [33] már ezen új lehetséges alkalmazások által motiválva jelentősen, 1/1000-ről $1/\sqrt{2}$-re javította a fenti tételben szereplő regularitási állandót. Érdekes lenne kideríteni, hogy vajon $1/\sqrt{2}$-e a lehető legnagyobb regularitási konstans, melyre a fenti tétel érvényes. M. Ash, J. Cohen, C. Freiling és D. Rinne az [1] dolgozatban a hullámegyenlet általánosításaival foglalkoztak. A parciális differenciálást, valamely általánosabb differenciálási eljárásra cserélve azt vizsgálták, hogy vajon érvényes marad-e a fenti tétel. Ezeket az általánosításokat, mint ez az [1] cikkből kiderül, többszörös Fourier-sorok unicitási problémái motiválták.

Az [1] cikk egyik megjegyzése alapján a speciális felosztások létezésére vonatkozó 1. Tételt általánosított differenciáloperátorokat tartalmazó hullámegyenlet megoldáshalmazának meghatározására lehet használni.

Az első fejezet második felében W. F. Pfeffer egy kérdésére válaszolva a következő tételt bizonyítottam:

2. Tétel. *Ha $f : A \to \mathbb{R}^m$ lipeomorfizmus, akkor Lebesgue sűrűségi pontok képe sűrűségi pont és diszperziós pontok képe diszperziós pont.*

Azt könnyű belátni, hogy majdnem minden sűrűségi pont képe sűrűségi pont, a fenti tétel fő eredménye az, hogy nincs nulla mértékű kivételes halmaz. Brouwer-nek a tartomány invarianciájára vonatkozó klasszikus tétele [39, Chapter VI, §6, Theorem VI 9, p.95] szerint: Ha $X \subset \mathbb{R}^m$ tetszőleges részhalmaz és $f : X \to \mathbb{R}^m$ adott homeomorfizmus akkor ha x belső pontja X-nek, akkor $f(x)$ belső pontja $f(X)$-nek. Tehát a 2. Téltel e klasszikus eredmény sűrűségtopológia/lipeomorfizmus változatának tekinthető. Ezek az általánosítások kvázikonform/kváziszimmetrikus leképezésekkel foglalkozó matematikusok számára is érdekesek voltak.

A második fejezet első felében nem L^1-beli függvények ergodikus közepeivel foglalkozom. Az általánosított integrálok és az ergodtétel kapcsolatának tisztázása céljából feltett kérdéseink egyikére Major Péter készített egy példát, mely azt mutatta, hogy az ergodtétel és az általánosított integrálok kapcsolatának vizsgálatakor óvatosnak kell lennünk. Major Péter eredménye a következő:

3. Tétel. *Létezik egy valószínűségi mértéktér $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és egy rajta értelmezett $f : X \to \mathbb{R}$ mérhető függvény, valamint $S_1, S_2 : X \to X$ ergodikus transzformációk, melyekre*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(S_1^k x) = 0 \ m.m.$$

és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(S_2^k x) = a \neq 0 \ m.m.$$

Birkhoff Ergodtétele szerint nyilván $f \notin L^1(X, \mu)$.

Laczkovich Miklós vetette fel azt a kérdést, hogy vajon a fenti példában választhatjuk-e az S_1, S_2 transzformációkat az egységkör, $\mathbb{T}$, irracionális forgatásainak. Major Péter példájában szereplő transzformációk konjugáltak és konjugált forgatásoknak ugyanaz a forgatási száma, azaz megegyeznek. Így új módszerekre volt szükség a válaszadáshoz.

Tegyük föl, hogy $f : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ mérhető függvény és legyen

$$\Gamma_f = \{\alpha : \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(x + k\alpha) \text{ m. m. konvergál}\}.$$

A Γ_f halmazt az f forgatási halmazának nevezzük. E forgatási halmazokra vonatkozik a következő eredmény (ld. [10]):

4. Tétel. *(i) A Γ_f halmaz akkor és csak akkor pozitív Lebesgue-mértékű ha $f \in L^1(\mathbb{T})$;*

(ii) Tetszőleges, a racionális számok fölött független, $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ sorozathoz található olyan nem Lebesgue integrálható $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ függvény, melynek forgatási halmaza, Γ_f tartalmazza a fenti sorozat összes elemét.

Az (i) tulajdonság szerint ha Γ_f „nagy", azaz pozitív Lebesgue mértékű, akkor f integrálható $\mathbb{T}$-n és így az összes irracionális szám Γ_f-hez tartozik, valamint az irracionális forgatások ergodikussága miatt az összes ergodikus közép a függvény integráljához tart. Azonban a (ii) állításból következik, hogy Γ_f nem integrálható függvények esetén is lehet sűrű az egységkörön. A [60] cikkben R. Svetic megmutatja, hogy c-sűrűség is elérhető, azaz Γ_f-nek minden nemüres nyílt intervallumban kontinuum sok eleme is lehet nem integrálható f-re.

Nem ismeretes, hogy mit mondhatunk a forgatási halmaz Hausdorff-dimenziójáról, azaz létezik-e olyan nem integrálható $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ függvény, melyre Γ_f Hausdorff-dimenziója pozitív.

A következő tételben adtam pozitív választ Laczkovich Miklós kérdésére, ld. [9]. E tételt egy lektor javaslatára kicsit általánosabban, szabad $\mathbb{Z}^2$ hatásokra mondtam ki. Az egységkörön két független irracionális forgatás szabad $\mathbb{Z}^2$ hatás.

Tegyük föl, hogy az S és T transzformációk az $(X, \mathcal{S}, \mu)$ véges atommentes Lebesgue téren hatnak, a $T^j S^k$ minden $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$-re mértéktartó transzformáció. A T és S generálta $\mathbb{Z}^2$ csoporthatás szabad ha $T^j S^k x \neq x$ teljesül μ majdnem minden x-re ha $(j,k) \neq (0,0)$.

5. Tétel. *Tegyük föl, hogy $(X, \mathcal{S}, \mu)$ véges atommentes Lebesgue tér és az $S, T : X \to X$ μ-ergodikus transzformációk szabad $\mathbb{Z}^2$ hatást generálnak X-en. Ekkor tetszőleges $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$-höz található olyan μ mérhető $f : X \to \mathbb{R}$, melyre*

$$M_N^S f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^{N} f(S^j x) \to c_1, \ \text{és}$$

$$M_N^T f(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^{N} f(T^j x) \to c_2,\ \ \mu\ m.m.\ x\text{-re ha } N\to\infty.$$

További más jellegű, de az ergodtételre és nem integrálható függvényekre vonatkozó eredmények találhatók J. Woś [67] és [68] dolgozataiban.

A második fejezet második felében egydimenziós dinamikus rendszerekkel kapcsolatos kivételes halmazokkal foglalkozom. Ez a szakasz K. M. Brucks-szal közös [5] cikkemen alapul.

Tegyük föl, hogy (X,ρ) kompakt metrikus tér, $E \subset X$, $x \in X$ és $\delta > 0$. Jelöljük $\gamma(E,x,\delta)$-val az 1 és a következő szám minimumát

$$\sup\{2\eta \mid \eta > 0 \text{ és létezik } y \in X \text{ melyre } B(y,\eta) \subset B(x,\delta)\setminus E\}.$$

Ha nem létezik fenti y akkor $\gamma(E,x,\delta)\stackrel{\text{def}}{=}0$.

6. Definíció. Ha $x \in E$, akkor *az E halmaz X-beli porozitása az x pontban*

$$p(E,x) = \limsup_{\delta\to 0^+} \frac{\gamma(E,x,\delta)}{\delta}.$$

Ha $p(E,x) > 0$, akkor az E halmaz *porózus az X tér x pontjában.* Az E halmaz *porózus X-ben* ha $p(E,x) > 0$ minden $x \in E$-re. Az X minden olyan részhalmazát, mely előáll megszámlálható sok X-ben porózus halmaz uniójaként *X-ben σ-porózusnak* nevezzük. Az $A \subset X$ *ko-σ-porózus,* ha $X \setminus A$ σ-porózus.

Ha nincsenek X-ben izolált pontok, akkor minden X-beli megszámlálható részhalmaz σ-porózus.

$a \in (1,2]$-re legyen $T_a(x) = ax$ ha $0 \le x \le \frac{1}{2}$ és $T_a(x) = a(1-x)$ ha $\frac{1}{2} \le x \le 1$. Ezt az egyparaméteres függvénycsaládot *sátor* függvénycsaládnak hívjuk.

A $[\sqrt{2},2]$ paraméterintervallumban fogunk dolgozni. Ha $\sqrt{2} < a^m \le 2$ valamely $m \in \{1,2,2^2,$ $2^3,...\}$-re, akkor a T_a dinamikus rendszer nemvándorló halmaza m darab diszjunkt zárt intervallumból és véges sok periodikus pontból áll [59, p.78]. Ilyen a értékekre ha T_a^m-et megszorítjuk az előbb említett intervallumok valamelyikére, akkor a^m meredekségű sátor leképezést kapunk, mely így affin-konjugáltja T_{a^m}-nek. Így kisebb paraméterértékekre könnyű átvinni az eredményünket. T_a-t megszorítjuk $[T_a^2(\frac{1}{2}), T_a(\frac{1}{2})]$-re, a leképezés dinamikus magjára, mely a legrövidebb (előrefele) invariáns intervallum, amely tartalmazza a szélsőértékhelyet, azaz az $\frac{1}{2}$-et. Pálya alatt az előrefele (pozitív iteráltakra vett) pályát értjük.

A [4] cikkben K. M. Brucks és M. Misiurewicz megmutatta, hogy Lebesgue majdnem minden $a \in [\sqrt{2},2]$-re a szélsőértékhely pályája a T_a dinamikus rendszerre nézve sűrű $[T_a^2(\frac{1}{2}), T_a(\frac{1}{2})]$-ban, azaz a dinamikus magban. Jelöljük $\mathcal{D}$-vel azon $a \in [\sqrt{2},2]$ paraméterértékeket, melyekre a szélsőértékhely pályájának lezárása a T_a rendszerre nézve megegyezik $[T_a^2(\frac{1}{2}), T_a(\frac{1}{2})]$-vel. Az [5] cikkben megmutattuk, hogy

7. Tétel. *A $[\sqrt{2},2]\setminus\mathcal{D}$ halmaz σ-porózus.*

A porozitással kapcsolatos tulajdonságoknak például [69]-ben és [61] Appendixében nézhet utána az érdeklődő olvasó. Minden valós σ-porózus halmaz első kategóriás és Lebesgue szerint nullmértékű, de nem minden első kategóriás és nullmértékű halmaz σ-porózus. Azaz a σ-porózus halmazok σ-ideálja a nullmértékű és első kategóriás halmazok σ-ideáljának valódi része. Így a 7. Tétel a [4] eredményének élesítése.

A harmadik fejezet a Haight–Weizsäcker problémáról szól.

Alapprobléma: Legyen $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ mérhető függvény. Igaz-e, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} f(nx)$ vagy majdnem mindenütt konvergens, vagy majdnem mindenütt divergens?

Ebben a fejezetben kizárólagosan a Lebesgue mértékkel foglalkozunk, így mérhető alatt Lebesgue mérhetőt értünk, és az A halmaz Lebesgue mértékét $|A|$-val fogjuk jelölni. Kicsit pongyolán az alapprobléma úgy is megfogalmazható, hogy vajon érvényes-e a $\sum f(nx)$ sorra a nulla-egy törvény.

Mielőtt megválaszolnánk az alapproblémát röviden összefoglaljuk annak történetét.

Az American Mathematical Monthlyban jelent meg 1957-ben a K. L. Chung által kitűzött következő:

Feladat [34]: Ha $f\in C[0,\infty)$, $f\geq 0$, és $\int_0^\infty f(x)dx=\infty$, akkor mutassuk meg, hogy található $x>0$, melyre $\sum_{n=1}^{\infty} f(nx)=\infty$!

Azt nem nehéz belátni (ld. pl. [64]), hogy ha $\int_0^\infty f(x)dx<\infty$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} f(nx)<\infty$ majdnem mindenütt.

Az alapprobléma nem csak H. v. Weizsäcker diplomamunkájában, hanem J. A. Haight egy cikkében [35] is felmerült. Úgy tűnik, hogy e kérdés 1970-ben a „levegőben lógott” hiszen tudomásom szerint Weizsäcker nem tudott Haight cikkéről. A [35] cikk fő eredménye annak megmutatása, hogy létezik olyan végtelen mértékű $H\subset(0,\infty)$ halmaz, melyre minden $x,y\in H$, $x\neq y$ számra x/y nem egész, továbbá

$*$ minden $x>0$-ra $nx\notin H$ ha n elég nagy.

Ez utóbbi tulajdonságból következik, hogy ha $f=\chi_H$, a H halmaz karakterisztikus függvénye, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} f(nx)<\infty$ majdnem mindenütt és mivel H végtelen mértékű, így $\int_0^\infty f(x)dx=\infty$.

A $*$-gal jelölt tulajdonságú halmazokkal már Lekkerkerker is foglalkozott 1958-as [42] dolgozatában.

Haight az alapprobléma következő speciális esetét fogalmazta meg:

8. Kérdés. Ha f valamely $A\subset(0,\infty)$ mérhető halmaz karakterisztikus függvénye, akkor az alapproblémára mi a válasz?

Igen érdekes a periodikus függvényekre vonatkozó problémakör története is. Arról az esetről van tehát szó, amikor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ periodikus mérhető függvény és az általánosság megszorítása nélkül föltesszük, hogy periódusa $p=1$.

Ha a megfelelő sor helyett csak az $f(nx)$ sorozatot tekintjük, akkor Mazur és Orlicz, [46], 1940-ben bebizonyították, hogy majdnem minden x-re

$$\limsup_{n\to\infty} f(nx)=\operatorname{ess\,sup} f.$$

Ez a tulajdonság érvényben marad akkor is, ha az (n) sorozat helyett tetszőleges (λ_n) végtelenhez konvergáló sorozatot veszünk.

Ebből az eredményből már következik, hogy ha f valamely pozitív mértékű, 1 szerint periodikus halmaz karakterisztikus függvénye, akkor majdnem minden x-re $\sum_n f(nx)=\infty$ így a periodikus esetben érvényes a nulla-egy törvény.

Sokkal érdekesebb tehát a részletösszegek számtani közepeiből képzett sor (Cesàro 1 közepek) konvergenciáját vizsgálni. Erre vonatkozik a

Hincsin sejtés [40] (1923): Tegyük föl, hogy $E\subset(0,1)$ mérhető halmaz és $f(x)=\chi_E(\{x\})$, ahol $\{x\}$ az x törtrészét jelöli. Igaz-e, hogy majdnem minden x-re

$$\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} f(nx)\to|E|?$$

H. Weyl [65] egy 1916-os cikke nyomán ismeretes volt, hogy a Hincsin sejtés igaz ha f Riemann integrálható.

Raikov [53] (1936), illetve Riesz [55] (1945) megmutatták, hogy ha az 1 szerint periodikus f függvény $[0,1]$-en Lebesgue integrálható, akkor tetszőleges $q > 1$ egész számra

$$\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} f(q^n x) \to |E|$$

teljesül majdnem minden x-re.
Erdős, [31], 1949-ben viszont bebizonyította, hogy található olyan $a_n \to \infty$ sorozat és f, $L^1(0,1)$-beli függvény, hogy

$$\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} f(a_n x) \to |E|$$

nem teljesül majdnem minden x-re.
Végül 1969-ben Marstrand [45] megmutatta, hogy nem igaz a Hincsin sejtés.

1998-ban D. Mauldinnal közös [23] cikkünkben sikerült megmutatni, hogy az alapproblémára a Hincsin sejtéshez hasonlóan negatív a válasz.

9. Tétel. *Található olyan mérhető $f : (0, +\infty) \to \{0,1\}$ függvény és két intervallum J_F, $J_\infty \subset [\frac{1}{2}, 1)$, hogy minden $x \in J_\infty$-re $\sum_{n=1}^{\infty} f(nx) = +\infty$ és majdnem minden $x \in J_F$-re $\sum_{n=1}^{\infty} f(nx) < +\infty$. Az f függvény választható egy nyílt halmaz karakterisztikus függvényének.*

A fenti tétel tehát Haight kérdésére is választ ad.

1975-ben J. A. Haight a [36] cikkben az 1970-es [35] cikk általánosításait vizsgálta. Megmutatta, hogy tetszőleges $\Lambda \subset [0, +\infty)$ megszámlálható és csak a $+\infty$-hez torlódó halmazhoz található olyan végtelen mértékű, mérhető $E \subset \mathbb{R}^+$ halmaz, hogy minden $x, y \in E$-re $x/y \notin \Lambda$, továbbá rögzített x-re csak véges sok olyan $\lambda \in \Lambda$ található, melyre $\lambda x \in E$. Ebből következik, hogy $f = \chi_E$ választása esetén $\sum_{\lambda\in\Lambda} f(\lambda x) < \infty$, de nyilván $\int_{\mathbb{R}^+} f(x)dx = \infty$.

Nyilván, $\sum_{n=1}^{\infty} f(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} f(2^{\log x + \log n})$, azaz átjelölés után additív alakban is megfogalmazható a problémánk. A $\sum_{n=1}^{\infty} f(x + \log n)$ konvergenciatulajdonságait vizsgáljuk $\mathbb{R}$-en, mérhető f függvények esetén.

Ebben az „additív" megközelítésben az alapproblémát a következő módon általánosíthatjuk:

Adott $\Lambda \subset [0, \infty)$ diszkrét halmaz esetén az

$$s(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\lambda\in\Lambda} f(x+\lambda) \tag{1}$$

sorra teljesül-e a nulla-egy törvény, azaz tetszőleges $f \geq 0$ mérhető függvényre igaz-e, hogy az (1) sor, vagy majdnem mindenütt konvergál, vagy majdnem mindenütt divergál?

E a probléma motiválta a J-P. Kahane-nal és D. Mauldinnal közös [21] és [22] cikkeinket. A következőkben felsorolunk néhány eredményt.

Legyen $C = C(f, \Lambda) = \{x : s(x) < \infty\}$, valamint $D = D(f, \Lambda) = \{x : s(x) = \infty\}$.

10. Definíció. A Λ halmaz *1-es típusú,* ha tetszőleges mérhető f-re, vagy $C(f, \Lambda) = \mathbb{R}$ majdnem mindenütt, vagy $C(f, \Lambda) = \emptyset$ majdnem mindenütt (azaz teljesül Λ-ra a nulla-egy törvény). Egyébként Λ 2*-es típusú.*

11. Példa. *Ha $\Lambda_k = 2^{-k}\mathbb{N} \cap [2^k, 2^{k+1})$ és $\Lambda = \cup_{k\in\mathbb{N}}\Lambda_k$, akkor Λ 1-es típusú (ez a később megfogalmazandó 14. Tétel következménye).*

12. PÉLDA. *Legyen* $\Lambda = \{\log n, n = 1, 2, ...\}$. *A 9. Tétel szerint* Λ *2-es típusú.*

13. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy Λ *aszimptotikus sűrűsége* végtelen, ha minden $a > 0$-ra

$$\lim_{x\to\infty} \#(\Lambda \cap [x, x + a]) = \infty$$

teljesül. Ha Λ nem végtelen aszimptotikus sűrűségű, akkor azt mondjuk, hogy *aszimptotikusan hézagos.*

Az előző két példában Λ aszimptotikusan sűrű volt.

14. TÉTEL. *Legyen* (n_k) *a természetes számok tetszőleges szigorúan monoton növekvő sorozata* $\Lambda_k = 2^{-k}\mathbb{N} \cap [n_k, n_{k+1})$ *és* $\Lambda = \cup_{k\in\mathbb{N}}\Lambda_k$. *Ekkor* Λ *1-es típusú.*

A következő tétel a 9. Tétel pontosítása. $C_0^+(\mathbb{R})$-rel a nemnegatív, folytonos, végtelenben nullához tartó függvények terét jelöljük.

15. TÉTEL. *A* $\Lambda = \{\log n : n = 1, 2, ...\}$ *halmaz 2-es típusú. Továbbá található olyan* f, $C_0^+(\mathbb{R})$-*beli függvény, melyre* C *teljes mértékű a* $(0, \infty)$ *félegyenesen és* D *tartalmazza a* $(-\infty, 0)$ *félegyenest. Ha minden* c,*-re* $\int_c^{+\infty} e^y g(y)dy < +\infty$, *akkor* $C(g, \Lambda) = \mathbb{R}$ *majdnem mindenütt. Ha* $g \in C_0^+(\mathbb{R})$ *és* $C(g, \Lambda)$ *nem első kategóriás, akkor* $C = \mathbb{R}$ *m. m. Ezenkívül található olyan* $g \in C_0^+(\mathbb{R})$, *melyre* $C(g, \Lambda) = \mathbb{R}$ *m.m. és* $\int_0^{+\infty} e^y g(y)dy = +\infty$.

16. TÉTEL. *Tegyük föl, hogy* $(m(k))$ *természetes számok egy tetszőleges,* (n_k) *pedig egy szigorúan monoton növekvő részsorozata* $\Lambda_k = 2^{-m(k)}\mathbb{N} \cap [n_k, n_{k+1})$ *és* $\Lambda = \cup_{k\in\mathbb{N}}\Lambda_k$. *Ekkor adott* n_k*-hoz megválasztható az* $(m(k))$ *sorozat úgy, hogy* Λ *2-es típusú és* $m(k) \to \infty$.

17. TÉTEL. *Az aszimptotikusan hézagos* Λ *halmazok 2-es típusúak. Továbbá, valamely* $f \in C_0^+(\mathbb{R})$-*hez találhatók olyan* I *és* J *intervallumok, hogy* I *a* J*-től balra helyezkedik el és* $C(f, \Lambda)$ *tartalmazza* I*-t, míg* $D(f, \Lambda)$ *tartalmazza* J*-t.*

A következő tétel tartalmazza azt a függetlenségen alapuló feltételt, mely elegendő ahhoz, hogy egy Λ halmaz 2-es típusú legyen.

18. TÉTEL. *Tegyük föl, hogy létezik három intervallum* I, J, K, *melyekre* $J = K + I - I$ *(itt algebrai, komplexus összegről van szó),* I *a* J*-től balra helyezkedik el és dist*$(I, J) \geq |I|$ *(ahol dist*(I, J)*-vel az* I *és* J *intervallumok egymástól vett távolságát jelöltük). Tegyük föl továbbá, hogy található két végtelenhez tartó sorozat:* (y_j) *és* (N_j) $(y_j \in \mathbb{R}^+$, $N_j \in \mathbb{N})$, *hogy minden* j*-re* $y_j - I$ *legalább* N_j *olyan* Λ*-beli pontot tartalmaz, melyek függetlenek a* $\Lambda \cap (y_j - J)$*-beli pontoktól abban az értelemben, hogy e halmazok által generált additív csoportok egyetlen közös eleme a* 0. *Ekkor* Λ *2-es típusú. Továbbá, található olyan* $f \in C_0^+(\mathbb{R})$ *függvény, melyre* $D(f, \Lambda)$ *tartalmazza* I*-t és* $C(f, \Lambda)$ *teljes mértékű* K*-n.*

A [24] cikkben R. D. Mauldinnal Λ halmazok egy speciális osztályát vizsgáltuk.

A 14. Tétel szerint ha adott az $n_1 < n_2 < ...$ természetes számokból álló sorozat, akkor 1-es típusú a $\Lambda^{(\frac{1}{2})^k} := \cup_{k=1}^{\infty}\Lambda_k^{(\frac{1}{2})^k}$, ahol $\Lambda_k^{(\frac{1}{2})^k} := (\frac{1}{2})^k\mathbb{Z} \cap [n_k, n_{k+1})$. Azonban a 16. Tétel szerint ez az 1-es típusú halmaz módosítható úgy, hogy 2-es típusú legyen. Azaz van olyan $m(k) \to \infty$ sorozat, melyre 2-es típusú a $\Lambda^{(\frac{1}{2})^{m(k)}} := \cup_{k=1}^{\infty}\Lambda_k^{(\frac{1}{2})^{m(k)}}$, $\Lambda^{(\frac{1}{2})^{m(k)}} := (\frac{1}{2})^{m(k)}\mathbb{Z} \cap [n_k, n_{k+1})$.

A $t > 0$ számot a Λ transzlátorának hívjuk, ha $(\Lambda + t) \setminus \Lambda$ véges.

A (†) *Tulajdonság* teljesül, ha a Λ transzlátoraiból álló $T(\Lambda)$ megszámlálható additív félcsoport sűrű $\mathbb{R}^+$-ban.

Megmutattuk, hogy a (†)-ből következik, hogy $C(f,\Lambda)$ vagy $\emptyset$, vagy $\mathbb{R}$, vagy egy zárt félegyenes (modulo nullmértékű halmaz). A fent említett két halmaz eleget tesz (†)-nek. Így a (†) önmagában nem elegendő annak eldöntésére, hogy Λ 1-es, vagy 2-es típusú.

Adott $\alpha \in (0,1)$ esetén tekintsük a következő halmazt $\Lambda^{\alpha^k} := \cup_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{\alpha^k}$, $\Lambda_k^{\alpha^k} = \alpha^k \mathbb{Z} \cap [n_k, n_{k+1})$.

Ha $\alpha = \frac{1}{q}$ valamely $q \in \{2,3,...\}$-ra, akkor a 14. Tétel bizonyításának kis megváltoztatásával megmutatható, hogy $\Lambda^{(\frac{1}{q})^k}$ 1-es típusú és a (†) feltétel is teljesül. Ha $\alpha \notin \mathbb{Q}$, akkor a 18. Tétel alkalmazható, így Λ^{α^k} 2-es típusú.

Az $\alpha = \frac{p}{q}$, $(p,q) = 1$, $p,q > 1$, $p < q$ eset bizonyult nehéznek. Ekkor is sikerült megmutatnunk, hogy $\Lambda^{(\frac{p}{q})^k}$, 2-es típusú.

A következő tételben $\Lambda^{(\frac{p}{q})^k}$-t Λ-val jelöljük.

Válasszunk olyan r egész számot, melyre $r > 8$, $(r,p) = 1$, és $(r,q) = 1$.

A [24] cikk fő eredménye:

19. Tétel. *A fenti Λ 2-es típusú. Továbbá létezik olyan karakterisztikus függvény $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, melyre $[\frac{1}{r}, \frac{2}{r}]$ majdnem minden pontja $C(f,\Lambda)$-hoz tartozik, $|D(f,\Lambda) \cap [1+\frac{1}{r}, 1+\frac{2}{r}]| > \frac{1}{8r}$ és $|D(f,\Lambda) \cap [-1+\frac{1}{r}, -1+\frac{2}{r}]| > \frac{1}{8r}$.*

Ez egyben azt is illusztrálja, hogy a $C(f,\Lambda)$ konvergenciahalmaz lehet félegyenestől és $\mathbb{R}$-től különböző nemüres halmaz. Nem ismeretes, hogy pontosan milyen halmazok lehetnek konvergenciahalmazok.

A negyedik fejezetben a gradiensprobléma megoldásával foglalkozom. Közismert, hogy ha az $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ függvény az (a,b) nyílt intervallum minden pontjában differenciálható, akkor deriváltja, f' Darboux tulajdonságú és Baire egy osztályú, azaz előáll, mint folytonos függvények pontonként vett határértéke. Kevésbé ismert az úgynevezett Denjoy–Clarkson féle tulajdonság [28], [29]. Ez a tulajdonság azt mondja ki, hogy tetszőleges (α,β) nyílt intervallumnak a deriváltra vonatkozó inverz képe, $(f')^{-1}(\alpha,\beta)$ vagy üres, vagy pozitív egydimenziós Lebesgue mértékű. Ha a deriváltfüggvény folytonos, akkor ez nyilvánvaló következménye annak, hogy nemüres nyílt halmazok pozitív mértékűek, azonban a deriváltfüggvény nem feltétlenül folytonos, így a Denjoy-Clarkson tulajdonság azt mondja ki, hogy ennek ellenére egy deriváltfüggvény nem tud „súlytalanul" áthaladni egy intervallumon. Nem nehéz azonban olyan Darboux és Baire egy tulajdonságú függvényeket konstruálni, melyek nem rendelkeznek a Denjoy-Clarkson tulajdonsággal.

C. E. Weil gradiensproblémája a Denjoy–Clarkson tulajdonság többdimenziós általánosítására vonatkozott.

Tegyük föl, hogy $n \geq 2$, és $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, továbbá $f : G \to \mathbb{R}$ a G minden pontjában differenciálható n-változós függvény. Ekkor az f gradiense, $\nabla f = (\partial_1 f, ..., \partial_n f)$ a G nyílt halmazból $\mathbb{R}^n$-be menő leképezés. Tegyük föl, hogy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz. Igaz-e, hogy $(\nabla f)^{-1}(\Omega) = \{\mathbf{p} \in G : \nabla f(\mathbf{p}) \in \Omega\}$ vagy üres, vagy pozitív mértékű az n-dimenziós Lebesgue mértékre vonatkozólag? Folytonosan differenciálható függvényekre a válasz nyilvánvalóan pozitív.

A gradiensprobléma egy másik, ekvivalens és érdekes átfogalmazása a következő:

Jelölje B_1 az n-dimenziós Euklideszi tér egységgömbjét. Létezik-e olyan $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mindenütt differenciálható függvény, melynek a gradiense eltűnik az origóban, de Lebesgue majdnem mindenütt a gradiensének normája nagyobb, mint egy. Ez ugyebár azt jelenti, hogy $(\nabla f)^{-1}(B_1)$ nemüres, de nulla Lebesgue mértékű. Azaz differenciálható függvényünk az origó egy kis környezetében „globálisan" alig változik, bár „egy valószínűséggel" gyorsan változik (ha a Lebesgue mértéket mint ponthalmazok valószínűségét interpretáljuk).

A gradiensprobléma a Valós Analízis egy jól ismert és híres megoldatlan problémája volt. A 60-as évektől [63] megjelenése óta dolgoztak rajta. Én 1987-ben hallottam róla először. 15 éven keresztül, hosszabb-rövidebb intenzívebb munkaperiódusok után félretettem, majd amikor valami újat tanultam ismét elővettem. Néha, amikor úgy éreztem, hogy valamilyen önmagában is érdekes részeredményt kaptam, akkor azt egy-egy cikkben megírtam, konferenciákon előadást tartottam róla. Végül 2002 nyarának végén sikerült megoldanom. Bár Pólya György jól ismert tanácsát megfontolva igyekeztem mindkét irányból dolgozni a problémán, de az időm túlnyomó részét mégis azzal töltöttem, hogy megpróbáltam bizonyítani egy, a Denjoy–Clarkson tulajdonság n-dimenziós változatára vonatkozó tételt. Azonban valami apróság mindig hiányzott... 2000-ben egy külföldi konferencián L. Zajíček-kel még fogadást is kötöttem arra, hogy a gradiensprobléma megoldása az előbb említett tétel lesz. Azonban 2002-ben felül kellett bírálnom az eddigi álláspontomat és komolyan elkezdtem dolgozni egy kétdimenziós ellenpéldán, ami aztán el is juttatott a megoldáshoz, illusztrálva azt a köznapi bölcsességet, hogy rugalmasan kell gondolkozni és egy korrekt eljárás során mindkét „felet” meg kell hallgatni.

A gradiensprobléma megoldása tehát egy kétdimenziós ellenpéldafüggvény konstrukciója. A [17] cikkben lényegében a következő tételt látom be:

20. Tétel. *Található olyan $f : G \to \mathbb{R}$, valamely $G \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmazon értelmezett differenciálható függvény és egy $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, hogy valamely $\mathbf{p} \in G$-re $\nabla f(\mathbf{p}) \in \Omega_1$ de a kétdimenziós Lebesgue mérték, λ_2, szerint majdnem minden $\mathbf{q} \in G$-re a gradiens $\nabla f(\mathbf{q})$ nincs Ω_1-ben.*

A negyedik fejezet első felének öt szakaszában áttekintem azokat a publikált, önmagukban is érdekes részeredményeket, melyek a gradiensprobléma megoldásához vezettek. Először A $\mathcal{H}_1$ Denjoy-Clarkson tulajdonság-ról van szó.

Nem nehéz belátni, [12], hogy ha az n-dimenziós Lebesgue mértéket az egydimenziós Hausdorff mértékkel, $\mathcal{H}_1$-gyel helyettesítjük, akkor a Denjoy–Clarkson tulajdonság a többdimenziós esetben is érvényben marad:

21. Tétel. *Tegyük föl, hogy $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt és $f : G \to \mathbb{R}$ differenciálható. Ekkor minden $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazra $(\nabla f)^{-1}(\Omega)$ vagy üres, vagy pozitív $\mathcal{H}_1$-mértékű.*

Azaz nyílt halmazok gradiensleképezésre vonatkozó nemüres inverz képei legalább a $\mathcal{H}_1$-mértékre vonatkozólag nem lehetnek súlytalanok.

P. Holický, J. Malý, C. E. Weil és L. Zajíček a [38] cikkben megmutatta, hogy a fenti inverz kép más értelemben se lehet „súlytalan”. A következő tételben visszatér a 6. Definícióban megadott porozitás fogalma.

22. Tétel. *Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt és legyen f, G-n értelmezett differenciálható függvény. Tegyük föl, hogy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olyan nyílt halmaz, melyre $(\nabla f)^{-1}(\Omega) \neq \emptyset$. Ekkor a következő tulajdonságok teljesülnek:*

(i) *$(\nabla f)^{-1}(\Omega)$ egyetlen pontjában sem porózus.*

(ii) *Ha $H \subset \mathbb{R}^n$ nyílt és $H \cap (\nabla f)^{-1}(\Omega) \neq \emptyset$, akkor nincs olyan nem azonosan nulla lineáris függvény, $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ melyre vonatkozólag $L(H \cap (\nabla f)^{-1}(\Omega))$ nulla egydimenziós Lebesgue mértékű lenne. Ebből következik, hogy $H \cap (\nabla f)^{-1}(\Omega)$ pozitív egydimenziós Hausdorff mértékű.*

(iii) *Ha $H \subset \mathbb{R}^n$ nyílt és $H \cap (\nabla f)^{-1}(\Omega) \neq \emptyset$, akkor $H \cap (\nabla f)^{-1}(\Omega)$ nem σ-porózus.*

A fenti tétel (ii) pontjában lineáris függvénynek tetszőleges egyenesre való vetítést is választhatunk, azaz ha $(\nabla f)^{-1}(\Omega)$ nemüres, akkor tetszőleges egyenesre vett vetülete pozitív $\mathcal{H}_1$-mértékű.

A következő szakaszban a „paradox konvexitási" tulajdonsággal foglalkozom.

Az előző szakasz eredményei azt mutatják, hogy a [17] cikkben konstruált ellenpéldafüggvénynek meglehetősen komplikáltnak kell lennie. A következő, meglehetősen sok technikai részletet tartalmazó eredmény bizonyításakor arról voltam meggyőződve, hogy ilyen komplikált függvények nem is létezhetnek. Érdekes, hogy valószínűleg a technikai részletek miatt, ez a cikk nemigen keltette föl még a gradiensprobléma iránt egyébként érdeklődő kollégák figyelmét se, bár utólag visszagondolva az itt megfogalmazott „paradox konvexitási" tulajdonság vezetett el végülis a [17] cikkbeli végső konstrukcióhoz.

Belátható, hogy a 20. Tételbeli ellenpéldafüggvény létezéséből következik, hogy vannak olyan függvények, melyek eleget tesznek a következő tétel feltételeinek ([15]). ($int(A)$ és $cl(A)$ az A halmaz belsejét, illetve lezárását jelöli.)

23. Tétel. *Tegyük föl, hogy f differenciálható a $G \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmazon. Legyen $\overline{\Delta}_1 = cl\{\mathbf{x} \in G : \nabla f(\mathbf{x}) \in B(\mathbf{0}, 1)\}$. Tegyük föl, hogy $\overline{\Delta}_1$ nemüres és $\lambda_2(\overline{\Delta}_1) = 0$. Legyen $\mathcal{R} = B(\mathbf{0}, 1) \cap \nabla f(G)$ és $\mathcal{G} = B(\mathbf{0}, 1) \setminus cl(\mathcal{R})$. Ekkor $\mathcal{G}$ a sík konvex és nyílt részhalmaza, továbbá $\mathcal{G} \neq \emptyset$-ból még az is következik, hogy tetszőleges $\mathbf{p} \in int(cl(\mathcal{R}))$-re $\mathcal{H}_1(\{\mathbf{y} : \nabla f(\mathbf{y}) = \mathbf{p}\}) > 0$.*

A Baire egy tulajdonságot kihasználva alkalmas helyettesítés és egy lineáris függvény hozzáadása után elérhető, hogy $\mathcal{G} \neq \emptyset$ és $\mathbf{0} \in \mathcal{R}$, amennyiben f eredetileg egy 20. Tételbeli ellenpéldafüggvény volt a kétdimenziós Denjoy-Clarkson tulajdonságra. Ekkor $B(\mathbf{0}, 1)$ tartalmaz egy olyan félkörlemezt, melynek tetszőleges $\mathbf{p}$ pontjára $\mathcal{H}_1(\{\mathbf{x} : \nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{p}\}) > 0$ teljesül. Ez azt mutatja, hogy differenciálható függvényünk nagyon eltér azoktól a sima felületektől, melyekhez hozzászoktunk. Például ha valaki az $x_3 = f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ felső egységfélgömbfelületet tekinti, akkor tetszőleges $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$-re $(\nabla f)^{-1}(\mathbf{p})$ vagy üres, vagy egyetlen pontból áll. Tehát az ár, amit fizetnünk kell azért, hogy legyenek olyan nemüres nyílt halmazok melyeknek inverz ∇f képe nulla λ_2-mértékű az, hogy létezzen sok olyan pont, aminek inverz ∇f képe nagy a $\mathcal{H}_1$-mérték szerint.

Mivel $int(cl(\mathcal{R}))$ nem megszámlálható, így a 23. Tételből az is következik, hogy $(\nabla f)^{-1}(B(\mathbf{0}, 1))$ nem σ-véges $\mathcal{H}_1$-mértékű.

Tehát lehetséges, hogy $(\nabla f)^{-1}(B(\mathbf{0}, 1)))$ nemüres, de nulla λ_2 mértékű, de a fentiek szerint legalább nem σ-véges $\mathcal{H}_1$ mértékű. Nyilván nem lenne érdektelen pontosabban feltérképezni az itt fellépő hézagot, azaz megválaszolni a következő kérdést:

24. Kérdés. Tegyük föl, hogy $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt és $f : G \to \mathbb{R}$ differenciálható, továbbá $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olyan nyílt halmaz, melyre $(\nabla f)^{-1}(\Omega) \neq \emptyset$. Mi mondható ekkor $(\nabla f)^{-1}(\Omega)$ Hausdorff dimenziójáról?

A probléma úgy tűnik másokat is érdekel, mivel M. Zelený-nek van egy friss preprintje, [70], melyben olyan differenciálható $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(n \geq 2)$ függvényt konstruált, melyre a $(\nabla f)^{-1}(B(0, 1))$ nemüres 1 Hausdorff dimenziós halmaz.

A harmadik szakaszban olyan függvényeket vizsgálok, amiknek „sok" érintősíkjuk van.

Visszatérve a 23. Tételhez. Tegyük föl, hogy e tétel feltételei teljesülnek és $\mathbf{p} \in int(cl(\mathcal{R}))$. Legyen $f^{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$, ahol $\cdot$ az $\mathbb{R}^2$-beli skaláris szorzást jelöli. f szinthalmazaira a következő jelölést használjuk $f_c^{\mathbf{p}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} : f^{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = c\}$. A 23. Tétel bizonyítását elemezve belátható, hogy található c-k, olyan pozitív λ_1-mértékű halmaza, hogy minden ilyen c-hez van az $f_c^{\mathbf{p}}$ szinthalmazán olyan $\mathbf{x}_c$ pont, hogy $\nabla f^{\mathbf{p}}(\mathbf{x}_c) = \mathbf{0}$, azaz, $\nabla f(\mathbf{x}_c) = \mathbf{p}$. Tehát az f grafikonja által megadott felületen sok olyan pont található, ahol a felület érintősíkjának gradiense $\mathbf{p}$.

Ez az érdeklődésemet olyan differenciálható függvények felé fordította, melyeknek sok érintősíkja van. Ezzel kapcsolatos eredményeimet a [16] cikkben publikáltam. E cikk fő eredménye a következő:

25. TÉTEL. *Létezik olyan $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, C^1 függvény és hozzá egy seholsem sűrű, zárt, nulla λ_2-mértékű $E\subset[0,1]\times[0,1]$ halmaz, továbbá egy nemüres nyílt $H\subset\mathbb{R}^3$, hogy minden $(a,b,c)\in H$ ponthoz van olyan $(x_0,y_0)\in E$ melyre a $z=f(x,y)$ felület $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ pontbeli érintősíkja $z=ax+by+c$.*

Tehát nemcsak differenciálható, hanem C^1 függvényeknek is lehet sok érintősíkjuk. Kiemelendő, hogy a fenti tételben H a háromdimenziós paramétertér egy nemüres nyílt halmaza, míg E egy nullmértékű halmaz a kétdimenziós térben azaz a fenti leképezésnél egy dimenziót nyerünk és ez a „Peano" görbékre emlékeztet. Egydimenziós érveléseknél megszoktuk, hogy a C^1 függvények elegendően simák. Magasabb dimenzióban azonban sokszor C^1, vagy magasabb osztályú simaság még nem elegendő. Erre a jelenségre sok példát találhatunk például a parciális differenciálegyenleteknél, pl. a jól ismert Szoboljev Lemma ([56] Th. 7.25) ahol a simasági feltevések és a konkluzió dimenziófüggő.

Egy másik, az általunk tárgyalt problémakörhöz szorosan kapcsolódó eredmény a Morse–Sard tétel [47], [57].

26. TÉTEL. [37], Theorem 1.3. *Legyenek M és N, m és n dimenziós differenciálható sokaságok továbbá $f:M\to N$, C^r leképezés. Ha $r>\max\{0,m-n\}$ akkor $f(\Sigma_f)$ nulla Lebesgue mértékű N-ben (Σ_f az f kritikus pontjainak halmazát jelöli).*

Így, ha $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, C^2 függvény, akkor tetszőleges $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ pontra az $f(x,y)-ax-by$ függvény kritikus értékeinek halmaza, $c_{(a,b)}$ nulla λ_1-mértékű. Így nem tartalmazhat intervallumot és Fubini tétele szerint az

$$\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3:\ \text{a } z=ax+by+c \text{ sík érinti a } z=f(x,y)\text{-t}\}$$

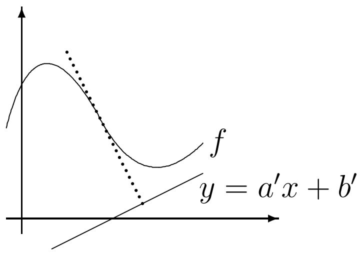
halmaz nulla λ_3-mértékű, és így a belseje üres.

A síkon értelmezett C^1 függvények még sok más érdekes tulajdonsággal rendelkezhetnek. Egyik kedvenc, témánkhoz kapcsolódó tételem Whitney [66] híres példája, melyben egy $\mathbb{R}^2$-n értelmezett olyan C^1 függvényt és hozzá egy nem elfajuló folytonos γ görbét konstruál, melyre $\nabla f=\mathbf{0}$, azaz a gradiens eltűnik a γ görbe minden pontjában, de f nem állandó a γ mentén. (Ez ugyebár minden hegymászó álma, úgy nyerni szintet, hogy közben nem megyünk fölfele. Sajnos az ár, amit ezért fizetni kell az, hogy a γ görbe végtelen ívhosszú...) Ha a C^1 simasági föltevést differenciálhatósággá enyhítjük, akkor említésre méltó Körner [41] „szuper Whitney" függvénye, egy olyan nem állandó, a síkon értelmezett, differenciálható függvény, hogy $\mathbb{R}^2$ bármely két pontja összeköthető egy olyan γ folytonos görbével, hogy $\nabla f=\mathbf{0}$ a γ minden, a végpontoktól különböző pontjában.

Érdemes néhány szót szólni a 25. Tétel egydimenziós változatáról is. Tegyük föl tehát, hogy $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha $y=ax+b$ az f, $(x_0,f(x_0))$ pontbeli érintője, akkor legyen $S_1(x_0)=(a,b)$. Lehetséges-e, hogy $S_1(\mathbb{R})$ belseje nemüres?

Az egydimenziós esetben C^1 függvények már elegendően simák a Morse–Sard tétel alkalmazhatóságához, így a C^1 esetben a válasz nemleges. Tetszőleges $a\in\mathbb{R}$ pontra az $f(x)-ax$ függvény kritikus értékeinek halmaza nulla mértékű. Így, rögzített a-ra nulla λ_1-mértékű azon b-k halmaza, melyekre (a,b) az S_1 értékkészletéhez tartozik.

Azt várhatnánk, hogy ha csak differenciálhatóságot teszünk föl, akkor a fenti kérdésre egydimenzióban pozitív választ kapunk. Azonban a válasz még differenciálható függvényekre is negatív. Ezúttal egy másik kedvenc Valós Analízisbeli tételem, a Denjoy-Young-Saks tétel ([58],

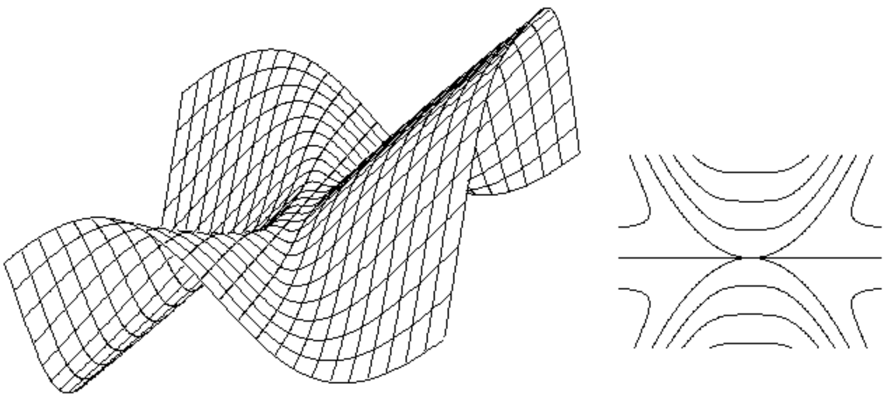


1. ábra. Az $y = a'x + b'$ egyenesre történő π' vetítés

Chap. IX, (3.7) Theorem, p. 267) egyik következménye adja meg a választ. Tegyük föl, hogy $y = a'x + b'$ adott síkbeli egyenes és π' jelöli az erre az egyenesre való merőleges vetítést. Tegyük föl, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és E' jelöli azon f grafikonján levő pontok π' képét, ahol f érintője merőleges $y = a'x + b'$-re, ld. a 1. ábrát. Ekkor $\lambda_1(E') = 0$. Ebből ismét következik, hogy $\lambda_2(S_1(\mathbb{R})) = 0$ teljesül még differenciálható függvényekre is.

A negyedik fejezet első felének negyedik szakaszában a szinthalmazokat vizsgálom.

A gradiensprobléma kétdimenziós esetén dolgozva érdeklődésem a síkon értelmezett differenciálható függvények szintvonalrendszerének vizsgálata felé fordult. (Ez az a szintvonalrendszer amivel bárki, aki szeret kirándulni a turistatérképeken, vagy más földrajzi térképeken találkozhat.)



2. ábra. $f(x, y)$ bifurkációs szintvonalakkal

Tegyük föl, hogy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható kétváltozós függvény. Kritikus pontokban a szintvonalak furcsán nézhetnek ki. Így természetes feltevés, hogy a gradiens legyen zérusvektortól különböző. E feltétel mellett vajon igaz-e, hogy az $\{(x, y) : f(x, y) = c\}$ szintvonal differenciálható görbékből áll? A válasz nemleges ld. [13]. Ha tekintjük az

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3 - yx^4}{y^2 + x^4}, & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvényt, akkor a következő tétel szerint e függvénynek van olyan szintvonala, mely bifurkációs pontot tartalmaz. A 2. ábra bal felén ezt a függvényt ábrázoltuk. A jobb látószög kedvéért a koordinátatengelyeket elfordítottuk és az y tengely balról jobbra mutat. Az ábra jobb oldalán e függvény szinthalmazrendszerét illusztráltuk, az x és y tengelyek a szokásos irányokba mutatnak. E függvény bifurkációs tulajdonságait fogalmaztuk meg a következő tételben.

27. Tétel. *Található olyan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, melynek a gradiense sehol se tűnik el, azaz $\nabla f(x, y) \neq \mathbf{0}$ tetszőleges $(x, y) \in \mathbb{R}^2$-re, de $S_0 = \{(x, y) : f(x, y) = 0\} = \{(x, y) : |y| = x^2,$ vagy $y = 0\}$, és így a $(0, 0)$ pontnak nincs olyan G nyílt környezete, amelyre $U \cap S_0$ egy nyílt intervallummal lenne homeomorf.*

Ez a tétel azonban a gradiensproblémához kapcsolódó kutatások szempontjából nem jelentett lényeges akadályt, hiszen a Baire egy tulajdonságot használva és egy alkalmas lineáris függvényt hozzáadva, mint a 23. Tétel esetén, mindig lehetőség volt arra, hogy olyan függvényekkel dolgozzunk, amiknek gradiense az origótól elhatárolható. Ez a feltevés már elegendő ahhoz, hogy megszabaduljunk a szintvonalak bifurkációs pontjaitól ([13], Theorem 2.):

28. Tétel. *Tegyük föl, hogy $G \subset \mathbb{R}^2$ nyílt és $f : G \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, melyre $||\nabla f(x, y)|| > r > 0$ teljesül minden $(x, y) \in G$-re. Ha valamely $(x_0, y_0) \in G$-re $c = f(x_0, y_0)$ akkor található az (x_0, y_0) pontnak olyan G_0 környezete, hogy $S_c = G_0 \cap \{(x, y) : f(x, y) = c\}$ egy nyílt intervallummal homeomorf és S_c-nek minden pontjában van érintője.*

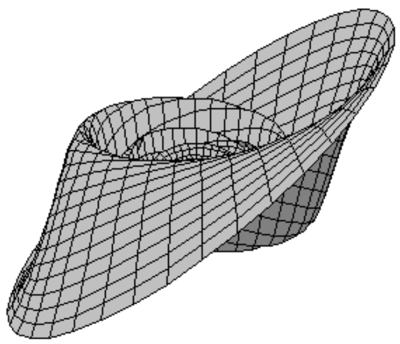
Elegendően erős simasági feltevések mellett hasonló eredmény kapható az implicit függvénytétel segítségével, azonban még az implicit függvénytétel különböző általánosításaihoz (ld. pl. [26]) is feltétel, hogy az $f(x, y)$ függvény y-szerinti parciális deriváltja nem tűnik el, valamint az (általánosított) parciális deriváltak lokális korlátossága is szükséges. Említésre érdemes azonban, hogy az implicitfüggvény tétel ikertestvéréhez az inverzfüggvény tételhez a differenciálhatóság elegendő feltevés. Az [52] cikkben a szerzők megmutatták, hogy ha $f : G \to \mathbb{R}^n$ differenciálható a $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon és $\det f'(\mathbf{x}) \neq 0$ minden $\mathbf{x} \in G$-re, akkor f lokális diffeomorfizmus. Ez a tétel jól ismert egyetemi tananyag ha f elegendően sima, azonban ha csak differenciálhatóságot teszünk föl, akkor nemtriviális topológia, (Degree Theory) van a háttérben.

A 27. és 28. Tételekben megkezdett kutatási irányt folytatta Elekes Márton. A [30] cikk eredményei azt mutatják, hogy ha egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény gradiense nem tűnik el, akkor tetszőleges $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : f(\mathbf{x}) = c\}$ szinthalmaz lokálisan homeomorf, vagy egy nyílt intervallummal, vagy (a bifurkációs pontokban) egy közös végpontból kiinduló véges sok szakasz uniójával. Ezenkívül a bifurkációs pontok diszkrét halmazt alkotnak.

A negyedik fejezet első felének utolsó, ötödik szakaszában deriváltak approximatív folytonosságával és parciális deriváltakkal foglalkozom.

29. Definíció. Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény az $\mathbf{x}$ pontban approximatív folytonos, ha található olyan Lebesgue mérhető $E \subset \mathbb{R}^n$ melynek az $\mathbf{x}$ Lebesgue sűrűségi pontja és $\lim_{\mathbf{y} \to \mathbf{x}; \mathbf{y} \in E} f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x})$. Egy f függvény approximatív folytonossági pontjait A_f-fel jelöljük.

Az [49] cikkben Petruska György megmutatta, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az F deriváltja, akkor f minden értékét felveszi approximatív folytonossági pontjai halmazán, azaz, $f(\mathbb{R}) = f(A_f)$. Ebből nyilvánvalóan következik az egydimenziós Denjoy–Clarkson tulajdonság. Ezért keltette fel érdeklődésem e tétel többdimenziós általánosításának problémája. Az [14] cikkben a következő tételeket bizonyítottam. Ha a parciális deriváltakat tekintjük, akkor:



3. ábra. $f(r,\phi)$

30. Tétel. *Tegyük föl, hogy* $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *differenciálható és* $i \in \{1,...,m\}$. *Ekkor* $f = \partial_i F$ *minden értékét felveszi* A_f*-en.*

Így differenciálható függvények parciális deriváltjai rendelkeznek a Denjoy–Clarkson tulajdonsággal. F differenciálhatóságának feltevése szükséges, mivel ha csak a parciális derivált létezését tesszük föl, akkor:

31. Tétel. *Található olyan folytonos* $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *függvény, melynek* $f = \partial F/\partial x_1$ *parciális deriváltja mindenütt létezik és* f *nem veszi fel minden értékét* A_f*-en.*

Differenciálható függvények gradiensével kapcsolatban is az előzőhöz hasonló a helyzet.

32. Tétel. *Található olyan* $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *differenciálható függvény, hogy* ∇f *nem veszi föl minden értékét* $A_{\nabla f}$*-en.*

E függvény polárkoordinátás definíciója a következő:

$$f(r,\phi) = \begin{cases} r^2 \sin\left(\phi + \frac{1}{r^2}\right), & \text{ha } r \neq (0,0); \\ 0, & \text{ha } r = 0. \end{cases}$$

Ezt ábrázoltuk a 3. ábrán. Az f függvény gradiense csak a $\mathbf{0}$-ban egyenlő a nullvektorral és ez az érték nem tartozik $A_{\nabla f}$-hez, ugyanis ahogy közeledünk az origóhoz spirálvonalak mentén „egyre meredekebben hullámzik” az f grafikonja.

33. Kérdés. Tegyük föl, hogy $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Egy $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektor a ∇f *reguláris értéke* ha található $\mathbf{x} \in A_{\nabla f}$, hogy $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Jelölje a reguláris értékek halmazát $REG(\nabla f)$. A gradiensproblémára adott ellenpéldánk a [14] cikkben megfogalmazott $REG(\nabla f)$-nek a ∇f értékkészletében való sűrűségére vonatkozó kérdésre is negatív választ ad. Másrészt a $REG(\nabla f)$ karakterizálására vonatkozó kérdésünk továbbra is megválaszolatlan, sőt még érdekesebbé vált.

A negyedik fejezet második felében vázolom a gradiensprobléma megoldását adó 20. Tétel konstrukciót aminek részletei a [17] cikkben jelentek meg.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom Császár Ákosnak és Laczkovich Miklósnak, mivel az Analízis és a Mértékelmélet alapjait tőlük tanultam meg. Köszönettel tartozom K. M. Brucksnak, J-P. Kahanenak, R. D. Mauldinnak, W. F. Pfeffernek és C. E. Weilnek a kutatási problémák javaslásáért és a kutatói együttműködésért. Köszönöm az ELTÉ-nek, a University of California at Davis-nek, a University of Wisconsin at Milwaukee-nak, a Michigan State University-nek és a University of North Texas-nak, hogy kutatási és munkalehetőséget adtak számomra. Hálával tartozom az OTKA, az FKFP, a Soros Alapítvány és a US National Science Foundation különböző anyagi támogatásaikért. Végül külön köszönet szüleimnek és Greschik Emőkének.

Mint ezt a bevezetőben említettem a dokori értekezésem az itt következő hivatkozási jegyzékben „Supplement"-ként is számozott 14 cikken alapul.

Hivatkozások

[1] J. M. Ash, J. Cohen, C. Freiling and D. Rinne, Generalizations of the wave equation, *Trans. Amer. Math.* Soc. **338**, (1993) 57-75.

[2] L. Block, W.A. Coppel, *Dynamics on one dimension,* Lecture Notes in Math. **1513**, Springer, New York (1992).

[3] K. Bogel, Über die mehrdimensionale Differentiation, *Jber. Deutsch. Math.-Verein.* **65** (1962), 45-71.

[4] K. Brucks, M. Misiurewicz, Trajectory of the turning point is dense for almost all tent maps, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **16** (1996), no. 6, 1173–1183.

[5] K. M. Brucks and Z. Buczolich, „Trajectory of the turning point is dense for a co-σ-porous set of tent maps", *Fund. Math.* **165** (2000) no. 2, 95-123. **Supplement 4.**

[6] A. Bruckner, „The problem of characterizing derivatives revisited", *Real. Anal. Exch.* **21** (1995/96), no. 1, 112-133.

[7] Z. Buczolich, A general Riemann complete integral in the plane, *Acta Math. Hung.* **57** (1991), 315-323. **Supplement 1.**

[8] Z. Buczolich, Density points and bi-Lipschitz functions in $\mathbf{R}^m$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **116** (1992), 53-59. **Supplement 2.**

[9] Z. Buczolich, Ergodic averages and free $\mathbb{Z}^2$ actions, *Fund. Math.*, **160**, (1999), 247-254. **Supplement 5.**

[10] Z. Buczolich, Arithmetic averages of rotations of measurable functions, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.* **16** (1996), 1185-1196. **Supplement 3.**

[11] Z. Buczolich, Generalized integrals and related topics, *Real Anal. Exchange* Vol. 23 No. 1, 1997-98, 27-36.

[12] Z. Buczolich, „The n-dimensional gradient has the 1-dimensional Denjoy-Clarkson property", *Real Anal. Exch.*, **18** (1992/93), no. 1, 221-224. **Supplement 9.**

[13] Z. Buczolich, „Level sets of functions $f(x,y)$ with nonvanishing gradient", *J. Math. Anal. Appl.*, **185** (1994), no. 1, 27-35. **Supplement 12.**

[14] Z. Buczolich, „Approximate continuity points of derivatives of functions of several variables", *Acta Math. Hungar.* **67** (1995) no. 3, 229-235. **Supplement 13.**

[15] Z. Buczolich, „Another note on the gradient problem of C. E. Weil", *Real Anal. Exch.*, **22** (1996/97), no. 2, 775-784. **Supplement 10.**

[16] Z. Buczolich, „Functions of two variables with large tangent plane sets", *J. Math. Anal. Appl.*, **220** (1998), no. 2, 562-570. **Supplement 11.**

[17] Z. Buczolich, „Solution to the gradient problem of C. E. Weil", *Rev. Mat. Iberoamericana,* **21** (2005) No. 3., 889-910. **Supplement 14.**

[18] Buczolich Z., A Gradiensprobléma, Matematikai Lapok, (In Hungarian. Talk given at the Big 5 conference) Új sorozat 11. évf. (2002-03) **1**, (2006).

[19] Z. Buczolich, On the gradient problem of C. E. Weil, *Real Anal. Exchange Summer Symposium report 2003,* 161-178.

[20] Z. Buczolich, Birkhoff sums and zero-one law, *Real Anal. Exchange Summer Symposium report 2000,* 13-22.

[21] Z. Buczolich, J-P. Kahane and R.D. Mauldin, On series of translates of positive functions, *Acta Math. Hungar.,* **93(3)** (2001), 171-188. **Supplement 7.**

[22] Z. Buczolich, J-P. Kahane and R.D. Mauldin, Sur les séries de fonctions positives, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math.* **329** (1999), no. 4, 261-264.

[23] Z. Buczolich and D. Mauldin, On the convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} f(nx)$ for measurable functions, *Mathematika,* **131** (2001), no. 4, 785-798. **Supplement 6.**

[24] Z. Buczolich and D. Mauldin, On series of translates of positive functions II., *Indag. Mathem.,* N. S., **12** (3), (2001), 317-327. **Supplement 8.**

[25] J.W.S. Cassels, *An Introduction to Diophantine Approximation*, Cambridge University Press, 1957.

[26] F. Cater, „A global implicit function theorem", *Real. Anal. Exchange* **16**, No. 1, (1990/91), 268-273.

[27] Choquet, G., Construction effective de suites $(k(3/2)^n)$. Études des mesures (3/2)-stables, *C. R. Acad Sci. Paris Sér. A-B* **291** (1980), no. 2, A69-A74.

[28] J. A. Clarkson, „A property of derivatives", *Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (1947) 124-125.

[29] A. Denjoy, „Sur une proprieté des fonctions dérivées", *Enseignement. Math.* **18** (1916) 320-328.

[30] M. Elekes, „Level sets of differentiable functions of two variables with non-vanishing gradient", *J. Math. Anal. Appl.*, **270** (2002) 369-382.

[31] P. Erdős, On the strong law of large numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **67** (1949) 51-56.

[32] H. Federer, *Geometric measure theory*, Die Grundlehren der matematischen Wissenschaften, Band 153, Springer-Verlag New York Inc., New York (1969).

[33] H. Fejzić, C. Freiling and D. Rinne, Two-dimensional partitions, *Real Analysis Exch.* **19** (1993-94), 540- 546.

[34] N.J. Fine and A.R. Hyde, Solution of a problem proposed by K.L. Chung, *Amer. Math. Monthly* **64** (1957), 119-120.

[35] J.A. Haight, A linear set of infinite measure with no two points having integral ratio, *Mathematika* **17** (1970), 133-138.

[36] J.A. Haight, A set of infinite measure whose ratio set does not contain a given sequence, *Mathematika* **22** (1975), 195-201.

[37] M. W. Hirsch, *Differential Topology*, Graduate Texts in Mathematics, **33**, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1976.

[38] P. Holický, J. Malý, C. E. Weil, and L. Zajíček, „A note on the gradient problem", *Real Anal. Exch.*, **22** (1996/97), no. 1, 225-235.

[39] W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton University Press, 1948.

[40] A. Khinchin, Ein Satz über Kettenbruche mit arithmetischen Anwendungen, *Math. Zeit.,* **18** (1923) 289-306.

[41] T. W. Körner, „A dense arcwise connected set of critical points– Molehills out of mountains", *J. London Math. Soc.* (2) **38** (1988), 442-452.

[42] C. G. Lekkerkerker, Lattice points in unbounded point sets, I. *Indag. Math.,* **20** (1958) 197-205.

[43] P. Major, A counterexample in ergodic theory, *Acta Sci. Math.* (Szeged) **62** (1996), 247-258.

[44] J. Malý and M. Zelený, A note on Buczolich's solution of the Weil gradient problem: a construction based on an infinite game, to appear in *Acta Mathematica Hungarica.*

[45] J. M. Marstrand, On Khinchin's conjecture about strong uniform distribution, *Proc. London Math. Soc.* **3** 21 (1970) 540-56.

[46] S. Mazur and W. Orlicz, Sur quelques propriétés de fonctions périodiques et presque-périodiques, *Studia Math.* **9** (1940), 1-16.

[47] A. P. Morse, „The behavior of a function on its critical set", *Ann. of Math.* (2) **40** (1939), 62-70.

[48] D. O. Ornstein and B. Weiss, Ergodic Theory of Amenable Group Actions. I: The Rohlin Lemma, *Bulletin of the Amer. Math. Soc.* **2** No. 1, (1980), 161-164.

[49] G. Petruska, „Derivatives take every value on the set of approximate continuity points", *Acta Math. Hungar.* **42** (1983) no. 3-4, 355-360.

[50] W. F. Pfeffer, The divergence theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.* **295** (1986) 665-685.

[51] D. Preiss, L. Zajíček, Fréchet differentiation of convex functions in a Banach space with a separable dual, *Proc. Amer. Math. Soc.* **91**, 202-204 (1984).

[52] M. Radulescu and S. Radulescu, „Local inversion theorems without assuming continuous differentiability, *J. Math. Anal. Appl.* **138** (1989), 581-590.

[53] D. A. Raikov, On some arithmetical properties of summable functions, *Mat. Sb.* **1** (43) (1936) 377-84.

[54] D.L. Renfro, *On some various porosity notions,* Preprint, (1995).

[55] F. Riesz, Sur la théorie ergodique, *Comment. Math. Helv.* **17** (1945) 221-39.

[56] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, *McGraw-Hill Book Co.,* (1973).

[57] A. Sard, „The measure of the critical values of differentiable maps", *Bull. Amer. Math. Soc.* **48** (1942), 883-890.

[58] S. Saks, *Theory of the integral*, Dover, New York, 1964.

[59] S. van Strien, *Smooth dynamics on the interval,* New Directions in Dynamical Systems, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **127**, Cambridge Univ. Press, Cambridge - New York, 57-119 (1988).

[60] R. Svetic, A function with locally uncountable rotation set, *Acta. Math. Hungar.* **81 (4)**, (1998), 305-314.

[61] B.S. Thomson, *Real Functions,* Lecture Notes in Math. **1170**, Springer, New York (1985).

[62] J. Väisälä, Porous sets and quasisymmetric maps, *Trans. Amer. Math. Soc.* **299** (1987), 525- 533.

[63] C. E. Weil, „On properties of derivatives", *Trans. Amer. Math. Soc.* **114** (1965), 363-376.

[64] H. v. Weizsäcker, Zum Konvergenzverhalten der Reihe $\Sigma_{n=1}^{\infty} f(nt)$ für λ-messbare Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, *Diplomarbeit,* Universität München, 1970.

[65] H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen modulo Eins, *Math. Ann.* **77** (1916) 313-52.

[66] H. Whitney, „A function not constant on a connected set of critical points", *Duke Math. J.*, **1**, (1935), 514-517.

[67] J. Woś, The filling scheme and the ergodic theorems of Kesten and Tanny, *Colloquium Mathematicum* **52** (1987), 263-276.

[68] J. Woś, A remark on the existence of the ergodic Hilbert transform, *Colloquium Mathematicum* **53** (1987), 97- 101.

[69] L. Zajíček, Porosity and σ-porosity, *Real Anal. Ex.* **13**, 314-347 (1987-88).

[70] M. Zelený, The Denjoy-Clarkson property with respect to Hausdorff measures for the gradient mapping of functions of several variables, (preprint).

[71] „Query 1”, *Real Anal. Exch.*, **16** (1990/91), no. 1, 373.