

**II. MAT. Tanári B. Sc.**

## Analízis Szigorlati Tételek részletes anyaga

Legutolsó módosítás ideje: 2008. június 2.

E jegyzéket a szigorlaton nem szabad használni, csak tájékoztatásra szolgál, a felkészülést hivatott elősegíteni. A vizsgatételjegyzéken csak a **vastagon szedett** tételcímek szerepelnek.

**1. Halmazelméleti, logikai, kombinatorikai alapfogalmak.**

(Logikai műveletek: és, vagy, tagadás, implikáció, ekvivalencia, kvantorok használata. Indirekt bizonyítás és teljes indukció, példákkal. Egyenlőtlenségek (közepek, Bernoulli). Halmazelméleti alapfogalmak. Kombinatorikai alapfogalmak.)

**2. Valós számok.**

(Mit jelent a konstruktív megalapozás? Az axiomatikus megalapozás eleje. A testaxiómák és az ezekkel kapcsolatos tételek. A rendezési axiómák és közvetlen következményeik. Korlátossággal kapcsolatos definíciók, Az Arkhimédészi és a Cantor-féle axióma.  $\mathbb{Q}$ , valamint  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sűrű.  $\sqrt[k]{a}$  definíciója, tizedes törtek.)

**3. Számsorozatok határértéke.**

(A határérték definíciója, ennek ekvivalens átfogalmazása, a határérték egyértelmősége. Konvergens sorozat egymást követő tagjainak különbségéből képzett sorozat viselkedése, részsorozatok definíciója. Konvergens sorozatok részsorozatai. Egyenlőtlenségek és határátmenet. Konvergencia és korlátosság. Végtelen határérték. Sorozatok átrendezése és véges módosításai.  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . A határérték tulajdonságai. Rendőr elv. Sorozatok összege, szorzata, hányadosa. Végtelen határérték és alpműveletek, kritikus határértékek. Bolzano–Weierstrass tétel. Megszámálható és nem megszámlálható halmazok. Cauchy kritérium sorozatokra. )

**4. Elemi függvények.**

(Függvényekkel kapcsolatos alapfogalmak. Az  $a^x$  definíciója és tulajdonságai. Az  $a^x$  határértéke, értékészlete.  $\log_a(x)$  definíciója és tulajdonságai. Függvénygrafikon ívhossza. Ív felmérése az egységkörre. Trigonometrikus függvények definíciója, a  $\sin x$  és a  $\cos x$  elemi tulajdonságai. A trigonometrikus függvények és inverzeik folytonossága, ábrái. (Az arkuszfüggvények definícióját is adjuk meg.) Hiperbolikus függvények és inverzeik.)

**5. Függvények határértéke, folytonossága.**

(Valós függvények. Lokális és globális tulajdonságok. Függvények határértéke és ennek különböző esetei. A határérték tulajdonságai. Átviteli elv. Függvények folytonossága. Korlátos, zárt intervallumon folytonos függvények. Inverz függvény folytonosságára vonatkozó tétel. Monoton függvény folytonossági pontjai. Konvexitás definíciója. Konvexitás és folytonosság.)

**6. Differenciálszámítás.**

(Az  $f'(a)$  definíciója, és a definíció közvetlen következményei. Differenciálási szabályok. Közvetett függvény differenciálási szabálya. Inverz függvény differenciálási szabálya. Trigonometrikus függvények deriváltjai. A logaritmusfüggvény deriváltja.)

## 7. A Differenciálszámítás alkalmazásai.

(A differenciálhatóság és a lokális növekedés kapcsolata. Középértéktételek. A L'Hospital féle szabály. Monotonitási feltételek. Szélsőérték-feladatok. Magasabb rendű deriváltak. Konvexitás karakterizálása deriváltak segítségével. Inflexiós pontok. Teljes függvényvizsgálat. A Jensen-egyenlőtlenség és következményei.)

## 8. A határozott integrál.

(A Riemann-integrál definíciója. Felosztások finomításai, egyenlőtlenség az alsó és felső integrálok között. Az integrálhatósággal ekvivalens tulajdonságok, integrálközelítő összegek. Integrálhatóságra vonatkozó elégséges feltételek, egyenletes folytonosság. Az integrál elemi tulajdonságai: részintervallumon való integrálhatóság, csatlakozó intervallumok, egyenlőtlenségek, linearitás, "[ $a + \delta, b$ ]"-s tétel és következményei. Közvetett függvény, szorzat és hányados integrálhatósága. Improprius integrál. )

## 9. A határozatlan integrál.

(A Newton—Leibniz-szabály. Primitív függvények és integrálfüggvények. A Riemann-integrállal kapcsolatos függvényosztályok és ezek viszonya. A határozatlan integrálok kiszámítása: alapintegrálok,  $\int cf$ ,  $\int f + g$ ,  $\int f(ax + b)dx$ ,  $\int f^\alpha f'$ ,  $\int f'/f$ , parciális integrálás, helyettesítéssel való integrálás, adjunk példákat is. Racionális törtfüggvények, (elemi racionális törtfüggvények és ezek integrálása). A parciális törtekre való felbontás létezésére vonatkozó tétel. A parciális törtekbontás technikája. Racionalizáló helyettesítések.)

## 10. Az integrálszámítás alkalmazásai.

(A Wallis és a Stirling formula. Területszámítás: Vázlatosan a terület fogalma, görbe alatti terület, körszelet területe, körcikk területe, szektorszerű tartomány területe. Forgástestek térfogata. Forgástestek felszíne.)

## 11. Végtelen sorok.

(Végtelen sorok definíciója és elemi konvergencia tulajdonságai. Nemnegatív tagú sorok konvergencia tulajdonságai. Gyök- és Hányadoskritérium. Leibniz típusú sorok. Sorok átrendezése. Négyzetes és Cauchy szorzat. Integrálkritérium.)

## 12. Függvénysorozatok és függvénysorok.

(Definíciók, egyenletes konvergencia, példák, Cauchy-kritérium, Weierstrass-kritérium. Határátmenet és egyenletes konvergencia. Integrálás és egyenletes konvergencia. Differenciálás és egyenletes konvergencia. Hatványsorok: definíciók, konv. sugár, integrálhatóság és differenciálhatóság. Taylor polinomok és sorok. Elemi függvények sorfejtése.)

## 13. Metrikus terek.

Definíciók. Példák. Nyílt, zárt és sűrű halmazok. Belső/izolált és torlódási pontok. Nyílt és zárt halmazok tulajdonságai. Pontsorozatok konvergenciája.  $\mathbb{R}^n$ -beli pontsorozatok. Bolzano-Weierstrass tétel  $\mathbb{R}^n$ -ben. Kompaktság. Kompakt halmazok tulajdonságai. Kompaktsággal ekvivalens tulajdonságok  $\mathbb{R}^n$ -ben. Leképezések folytonossága. Szekciófüggvények folytonossága és többváltozós folytonosság. Átviteli elv. Folytonos leképezések további tulajdonságai. Folytonosság és nyílt halmazok. Kompakt halmazokon folytonos függvények. Leképezések határértéke. Kontinuitások. Banach fixponttétel.

#### 14. Differenciálegyenletek.

(Bevezetés, geometriai jelentés,  $y' = ky$  alakú egyenlet megoldása, explicit közönséges elsőrendű d.e. fogalma. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek. Szeparábilis differenciálegyenletek. Szeparábilis egyenletre visszavezethető differenciálegyenletek  $y' = f(x + y)$  és  $y' = f(y/x)$  (Példák!). Másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletek. Állandó együtthatós másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletek. Rezgőmozgás, csillapított és kényszerrezgés. )

#### 15. A többváltozós integrálszámítás elemei.

A Jordan mérték.  $k(H)$ ,  $b(H)$ ,  $t(H)$ ,  $k_m(H)$ ,  $b_m(H)$  és a közöttük fennálló összefüggések. Jordan mérhetőség és nullmértékű határ. A Jordan mérték tulajdonságai. Egybevágóságok, középpontos hasonlóság, valamint lineáris transzformációk hatása a Jordan mértékre. Integrálás  $\mathbb{R}^2$ -beli téglákon. Definíciók. Tulajdonságok. Lebontási "Fubini" tétel. Szukcesszív integrálás tétele. Példák. Integrálás Jordan mérhető halmazokon. Integrálás normáltartományokon. Ellipszis területe. Lebontási tétel három dimenzióban. Cavalieri-elv. Ferde gúla térfogata. Inhomogén lemez tömege, tehetelenségi nyomatéka, súlypontja.

#### 16. A többváltozós differenciálszámítás elemei I.

Lineáris transzformációk. Többváltozós derivált definíciója. Láncszabály. Parciális deriváltak. Jacobi mátrix. Gradiens. Iránymenti derivált. Folytonos differenciálhatóság. Magasabbrendű deriváltak. Young tétel. Első és második differenciál, Hesse-féle mátrix. A komplex függvénytan alapjai. Komplex differenciálhatóság. Cauchy-Riemann parciális differenciálegyenletek. A komplex derivált geometriai jelentése. Laplace egyenlet. Harmonikus függvények.

#### 17. A többváltozós differenciálszámítás elemei II.

Lagrange középértéktétel többváltozós általánosítása.  $m$ -edik differenciál. Többváltozós Taylor-formula. Szélsőértékkeresés. Szükséges és elégséges feltételek lokális szélsőérték helyek létezésére. Szintvonalak. Görbék implicit megadása. Implicit differenciálás. Kétdimenziós implicit függvény tétel. Feltételes szélsőérték. Lagrange multiplikátor módszer. Térfogati integrál transzformációja. Áttérés polárkoordinátákról Descartes koordinátákra.  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = ?$  Paraméteres integrálok folytonossága és differenciálása.

#### 18. A vonalintegrál.

Szakaszonként sima görbék. Tartományok. Rektifikálható görbék. Görbék ívhossza. Vonalintegrálok definíciója, elemi tulajdonságai. Primitív függvény. Newton—Leibniz formula vonalintegrálokra. Konzervatív leképezések. Primitív függvény létezésére vonatkozó szükséges és elégséges feltételek. Green tétele és annak területszámításra való alkalmazása. Az asztrois területe.