Név : ______________________ ELTE Azonosító: ______________________

2007/08 ELSŐ FÉLÉV II. MAT. TANÁRI B. SC. WEB MINTA VIZSGA

Az első feladat egy összesen 15 pontot érő beugró teszt, melyet 30 perc elteltével beszedünk. Ezen legalább 12 pontot kell elérni ahhoz, hogy a vizsga eredménye elégtelentől különböző legyen. Ez a pontszám is beszámít a 2-4 feladatcsoport pontszámába. Aki elkészült a beugró tesztfeladatokkal az hozzákezdhet a többi feladathoz.

1. feladat (Kizárólag a sorvégi pontozott vonalra írt válaszokat tudjuk elfogadni. Ha valami aminek a meghatározását kéri a feladat nem létezik akkor írjon N.L-et a pontozott vonalra. Ha egy eldöntendő kérdésre kell válaszolni írjon I-t, ha a válasz igenlő és N-et, ha a válasz nemleges. Ha több alternatíva (A, B, C, stb.) között kell választania, akkor írja be a megfelelő betűjelét a pontozott vonalra.)

1/a Igaz-e, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \to \frac{1}{1-x}$ egyenletesen $[-0.1, 0.1]$-en? a..........

1/b Ha $f_n(x) = (\frac{1}{x^2+1})^n$, akkor igaz-e, hogy
$\lim_{x\to 0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0} f_n(x)$ b..........

1/c Igaz-e, hogy ha $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) \to f(x)$ akkor
$\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx$. c..........

1/d Ha $\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, akkor $a_4 =$? d..........

1/e Igaz-e, hogy $\forall H \subset \mathbb{R}^n$, $\operatorname{mar}(\operatorname{mar} H) = \operatorname{mar} H$? e..........

1/f T.f.h. $H \subset M$. Ekkor $\{x \in M : \exists p_k \in H,\ p_k \to x\}$=?
A) $\operatorname{cl} H$; B) $\operatorname{mar} H$; C) $\operatorname{ext} H$. f..........

1/g Konvergens-e $\mathbb{R}^3$-ben az $(\frac{1}{n}, 3 + 2^{-n}, 3)$ pontsorozat? g..........

1/h Zárt halmaz-e $(\mathbb{R}, \varrho_{diszkr})$-ben $B(0, 1/2)$? h..........

1/i Egyenletesen folytonos-e egy $f : M \to M$ kontrakció? i..........

1/j Ha $Q \subset \mathbb{R}^n$-re $Q \in \mathcal{K}_m$, akkor $\operatorname{diam}(Q) =$? j..........

1/k Jordan mérhető-e $\mathbb{R}^2$-ben $\{(x, \frac{1}{x}) : x \in [1,2]\}$? k..........

1/l Ha Φ a $[0,1] \times [1,2]$, $0 < 1/2 < 1$ és $1 < 4/3 < 5/3 < 2$, x_i és y_j pontokhoz tartozó felosztása, akkor $t(T_{2;1}) =$? l..........

1/m $\int_{[0,2]\times[0,1]} y dxdy =$? A) $\frac{1}{2}$; B) 1; C) 2. m..........

1/n Az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$ ellipszis területe A) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \left(\int_{-b\sqrt{1-(x^2/a^2)}}^{b\sqrt{1-(x^2/a^2)}} 1 dy\right) dx$;
B) $\displaystyle\int_{-b}^{b} \left(\int_{-a\sqrt{1-(x^2/a^2)}}^{a\sqrt{1-(x^2/a^2)}} 1 dy\right) dx$; C) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \left(\int_{-b\sqrt{1-(x^2/a^2)}}^{b\sqrt{1-(x^2/a^2)}} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} dy\right) dx$. n..........

1/o Az $y' = x + 2xy^2$ differenciálegyenlet $(1;2)$ ponton áthaladó megoldásának meredeksége =? o..........

A 2-4 feladatok megoldásakor minden lépést indokolni kell. Csak indokolt válaszokra, részválaszokra adunk pontot.

Minden feladatot **külön lapra** kell írni. Minden lapra kérem, hogy mindenki írja rá a nevét.

2. feladat

(a) Mondja ki és bizonyítsa a Weierstrass-kritériumot (Weierstrass M-tesztet). (5 pont)

(b) Bizonyítsa be, hogy kompakt halmaz folytonos képe kompakt. (4 pont)

(c) Mondja ki és bizonyítsa az elsőrendű lineáris differenciálegyenletek megoldására vonatkozó tételt. (6 pont)

3. feladat Egyenletesen konvergensek-e a megadott függvénysorozatok a megadott halmazokon?

(a) $f_n(x) = \operatorname{arctg}(\frac{x}{n})$ a $H_1 = \mathbb{R}$-en; (5 pont)

(b) $g_n(x) = x^n - x^{n+2}$ a $H_2 = [0, 1]$-en. (5 pont)

4. feladat

(a) Bizonyítsa be, hogy korlátos $H \subset \mathbb{R}^n$ halmazra $k_m(H) \to k(H)$, $b_m(H) \to b(H)$ (a téglákra vonatkozó hasonló állítást bizonyítás nélkül felhasználhatja). Mondja ki és bizonyítsa a Jordan mérhetőséget mar H segítségével karakterizáló tételt, valamint az e tétel bizonyításában felhasznált $k(H)$, $b(H)$, $k(\operatorname{cl} H)$ és $k(\operatorname{mar} H)$ közötti összefüggést megadó tételt. (10 pont)

(b) Mondja ki a Cavalieri-elvet, valamint azt a háromdimenziós integrálok lebontására vonatkozó tételt, melyen a Cavalieri-elv alapul. Ezután a Cavalieri-elv segítségével vezesse le a ferde gúla térfogatát megadó képletet. (10 pont)

Várható pontozás: 0-19 pont elégtelen, 20-29 pont elégséges, 30-39 pont közepes, 40-49 pont jó, 50-60 pont jeles.