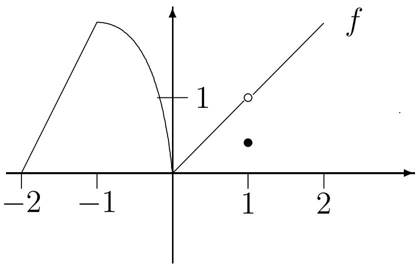
Név : ______________________ ELTE Azonosító: ______________

2010/11 Első félév I. Mat. B. Sc. Haladó Web-Minta Vizsga

Az első feladat egy összesen 15 pontot érő beugró teszt, melyet 30 perc elteltével beszedünk. Ezen legalább 12 pontot kell elérni ahhoz, hogy a vizsga eredménye elégtelentől különböző legyen. Ez a pontszám is beszámít a 2-4 feladatcsoport pontszámába. Aki elkészült a beugró tesztfeladatokkal az hozzákezdhet a többi feladathoz.



1. feladat (Kizárólag a sorvégi pontozott vonalra írt válaszokat tudjuk elfogadni. Ha valami aminek a meghatározását kéri a feladat nem létezik akkor írjon N.L-et a pontozott vonalra. Ha egy eldöntendő kérésre kell válaszonlni írjon I-t, ha a válasz igenlő és N-et, ha a válasz nemleges. Ha két állítás igazságtartalmát kell megadni akkor II, IN, NI, és NN a lehetséges válaszok annak függvényében, hogy az elsőre, illetve másodikra igen, vagy nem a válasz.

A következő kérdések az ábrán látható f függvényre vonatkoznak.

1/a $\max_{x\in[0,1]} f(x) =?$ a..........

1/b Igaz-e, hogy f-nek az 1 ugráshelye? b..........

1/c Igaz-e, hogy f-nek az 1 pontban szigorú lokális minimumhelye van?c..........

1/d $\lim_{n\to\infty} f(\frac{2}{n}) =?$ d..........

1/e Igaz-e, hogy f konvex $[-2,-1]$-en? e..........

1/f Igaz-e, hogy f konkáv $[-2,0]$-n? f..........

A következő kérdések **nem** vonatkoznak az ábrán látható függvényre.

1/g Igaz-e, hogy $\overline{(A \Rightarrow B)} = (\overline{A} \Rightarrow \overline{B})$, illetve $(\overline{B} \Rightarrow \overline{A}) = (A \Rightarrow B)$.
(II, NI, IN, NN a lehetséges válaszok) g..........

1/h Hány eleme van az $\{3, \{4,5\}, \{3,5\}\}$ halmaznak? h..........

1/i Igaz-e, hogy ha (a_n) korlátos sorozat, akkor konvergens? i..........

1/j Igaz-e, hogy ha f folytonos $(0,1)$-en, akkor korlátos? j..........

1/k Igaz-e, hogy $0,5^x$ szigorúan monoton növő és $\lim_{x\to 0+0} \log_3 x = +\infty$.
(II, NI, IN, NN a lehetséges válaszok) k..........

1/l Igaz-e, hogy ha f folytonos $I = (-1,1)$-en,
akkor $f(I)$ is nyílt intervallum. l..........

1/m $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} x =?$ m..........

1/n Periodikus-e $p = 0,5$ szerint a Dirichlet függvény? n..........

1/o Igaz-e, hogy ha f konkáv $[-1,1]$-en, akkor balról folytonos az 1-ben,
illetve folytonos a 0-ban?
(II, NI, IN, NN a lehetséges válaszok) o...........

A 2-4 feladatok megoldásakor minden lépést indokolni kell. Csak indokolt válaszokra, részválaszokra adunk pontot.

Minden feladatot **külön lapra** kell írni. Minden lapra kérem, hogy mindenki írja rá a nevét.

2. feladat

(a) Írja föl az első négy (összeadásra vonatkozó) testaxiómát és bizonyítsa be ezekből, hogy csak egyetlen nullelem tehet eleget a harmadik testaxiómának. (5 pont)

(b) Mutassa meg, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ és $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ akkor $\sqrt{n}$ irracionális. (5 pont)

(c) Mondja ki (de ne bizonyítsa) azt a tételt, mely függvények konvexitására ad szükséges és elégséges feltételt a húrok pontonkénti meredekségfüggvénye ($m_a(x)$) segítségével. E tétel segítségével mutassa meg, hogy az $f(x) = x^2$ függvény konvex $\mathbb{R}$-en. (5 pont)

3. feladat

Legyen $a_1 = 2$, $a_n = \frac{a_n + \frac{3}{a_n}}{2}$.

Mutassa meg, hogy $\sqrt{3} < a_n < 3$ teljesül minden n-re, és a_n szigorúan monoton csökkenő. $\lim_{n\to\infty} a_n =$?

(10 pont)

4. feladat

(a) Mondja ki és bizonyítsa a függvények határértékére vonatkozó átviteli elvet, valamint a függvényhatárértékre és kompozícióra vonatkozó tételt! (10 pont)

(b) Definiálja az ívhosszat: $s(f, [a, b])$-t, továbbá mondja ki és bizonyítsa azt tételt mely $s(f, [a, c])$, $s(f, [a, b])$ és $s(f, [a, c])$ között teremt kapcsolatot!

(10 pont)

Várható pontozás: 0-19 pont elégtelen, 20-29 pont elégséges, 30-39 pont közepes, 40-49 pont jó, 50-60 pont jeles.

A fenti minta-vizsgazh tájékoztató jellegű. A vizsgazh hasonló jellegű, de részleteiben eltérő lesz.