Név : ______________________________ ELTE Azonosító:__________________

2011/12 Első félév II. Mat. tanári BSC, Analízis 3 Web-Minta Vizsga

Az első feladat egy összesen 15 pontot érő beugró teszt, melyet 30 perc elteltével beszedünk. Ezen legalább 12 pontot kell elérni ahhoz, hogy a vizsga eredménye elégtelentől különböző legyen. Ez a pontszám is beszámít a 2-4 feladatcsoport pontszámába. Aki elkészült a beugró tesztfeladatokkal az hozzákezdhet a többi feladathoz.

**1. feladat** (Kizárólag a sorvégi pontozott vonalra írt válaszokat tudjuk elfogadni. Ha valami aminek a meghatározását kéri a feladat nem létezik akkor írjon N.L-et a pontozott vonalra. Ha egy eldöntendő kérdésre kell válaszolni írjon I-t, ha a válasz igenlő és N-et, ha a válasz nemleges. Ha több alternatíva (A, B, C, stb.) között kell választania, akkor írja be a megfelelő betűjelét a pontozott vonalra.)

1/a Igaz-e, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \to \frac{1}{1-x}$ egyenletesen $[-0.1, 0.1]$-en? a..........

1/b Ha $f_n(x) = (\frac{1}{x^2+1})^n$, akkor igaz-e, hogy
$\lim_{x\to 0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0} f_n(x)$? b..........

1/c Igaz-e, hogy ha $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) \to f(x)$ akkor
$\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx$. c..........

1/d Ha $\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, akkor $a_4 =$? d..........

1/e Igaz-e, hogy ha $H \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, akkor $\operatorname{mar} H$ is nyílt? e..........

1/f T.f.h. $H \subset M$. Ekkor $\{x \in M : \exists p_k \in H,\ p_k \to x\}$=?
A) $\operatorname{cl} H$; B) $\operatorname{mar} H$; C) $\operatorname{ext} H$; D) egyik sem. f..........

1/g Konvergens-e $\mathbb{R}^3$-ben az $(\frac{1}{n}, 3+2^{-n}, 3)$ pontsorozat? g..........

1/h Zárt halmaz-e $(\mathbb{R}, \rho_{diszkr})$-ben $B(0,1/2)$? h..........

1/i Egyenletesen folytonos-e egy $f : M \to M$ kontrakció? i..........

1/j Ha $f((x_1,x_2)^T) = (x_1^2 x_2^3, \cos(x_1 x_2))^T$ és $A = (a_{i,j}) = f'$,
akkor $a_{1,2} =$? j....................

1/k Igaz-e, hogy ha $\exists\, \nabla f(x)$ akkor $\forall v$, $||v|| = 1$-re $\exists\, \partial_v f(x)$? k..........

1/l Differenciálható-e az $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$-ben az $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$? l..........

1/m Ha $f$ 2-szer diffható $(a,b)$ egy $U$ kzetében akkor
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+t,b+t) - f(a+t,b) - f(a,b+t) + f(a,b)}{t^2} =?$$
A) $\partial_1 f(a,b)$, B) $\partial_1^2 f(a,b)$, C) $\partial_1\partial_2 f(a,b)$, D) egyik sem. m..........

1/n Pozitív definit-e $q((h_1,h_2)^T) = h_1^2$? n..........

1/o Igaz-e, hogy egy 2-szer diffható $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény Hesse mátrixában a bal felső és a jobb alsó elem megegyezik? o..........

1/p Ha $k = f(x, y(x))$, $f$ folyt. diffh. és $\partial_y f(x_0, y(x_0)) \neq 0$,
akkor $y'(x_0) =$? p....................

A 2-4 feladatok megoldásakor minden lépést indokolni kell. Csak indokolt válaszokra, részválaszokra adunk pontot.

Minden feladatot **külön lapra** kell írni. Minden lapra kérem, hogy mindenki írja rá a nevét.

**2. feladat**

**(a)** Mondja ki és bizonyítsa a Weierstrass-kritériumot (Weierstrass $M$-tesztet). (5 pont)

**(b)** Bizonyítsa be, hogy kompakt halmaz folytonos képe kompakt. (4 pont)

**(c)** Írja fel az $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^4 + 3x_1^2x_2^2 - x_1x_2 + 2$ függvény $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ pontbeli első és második differenciálját. (6 pont)

**3. feladat**

Egyenletesen konvergensek-e a megadott függvénysorozatok a megadott halmazokon?

**(a)** $f_n(x) = \mathrm{arctg}(\frac{x}{n})$ a $H_1 = \mathbb{R}$-en; (5 pont)

**(b)** $g_n(x) = x^n - x^{n+2}$ a $H_2 = [0, 1]$-en. (5 pont)

**4. feladat**

**(a)** Mondja ki és bizonyítsa a függvénysorozatok differenciálására vonatkozó tételt! (10 pont)

**(b)** Mondja ki és bizonyítsa a többdimenziós láncszabályt! (10 pont)

Várható pontozás: 0-19 pont elégtelen, 20-29 pont elégséges, 30-39 pont közepes, 40-49 pont jó, 50-60 pont jeles.