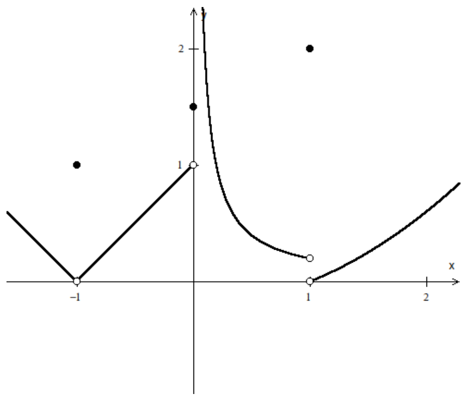
Név: ________________________ Neptun Azonosító: ______________

2022/23 Első félév I. Mat. B. Sc. Analízis Web-minta Vizsga



Minden helyes válasz 1 pontot ér. Akinek nincs legalább 11 pontja, az nem folytathatja a vizsgát. Az összevont pontszámba a teszten elért pontok a következő módon számítanak bele: $3 \cdot (\text{tesztpontszám} - 9)$.
Azaz, aki mondjuk 13 pontot ér el a beugró teszten, az $3 \cdot (13 - 9) = 12$ pontot visz tovább az összesített vizsgapontszámba.

1. feladat (Kizárólag a sorvégi pontozott vonalra írt válaszokat tudjuk elfogadni. Ha valami aminek a meghatározását kéri a feladat nem létezik akkor írjon N.L-et a pontozott vonalra. Ha egy eldöntendő kérdésre kell válaszolni írjon I-t, ha a válasz igenlő és N-et, ha a válasz nemleges. Ha több alternatíva (A, B, C, stb.) között kell választania, akkor írja be a megfelelő betűjelét a pontozott vonalra. "Egyik sem" azt jelenti, hogy a korábbi alternatívák közül egyik sem igaz.)

A következő kérdések az ábrán látható f függvényre vonatkoznak.

1/a $\lim_{x\to 0-0} f(x) =$? A) 0; B) 1; C) 1,5; D) $+\infty$; E) N.L. a..........

1/b Az f infimuma az [0,2]-n? A) 0; B) 1; C) 2; D) $+\infty$; E) N.L. b..........

1/c Konvex-e f a $[-1,0]$-n? c..........

1/d Ha $g(x) = [x]$, akkor $\lim_{x\to 1} g(f(x)) =$?
A) 0; B) 0,25; C) 2; D) $+\infty$; E) N.L.; F) egyik sem. d..........

A következő kérdések **NEM** vonatkoznak az ábrán látható függvényre.

1/e Igaz-e, hogy ha f monoton a [0,1]-en,
akkor $\exists\, x \in (0,1)$ ahol f folytonos. e..........

1/f $\min\{\frac{2^n+1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\} =$? A) 0; B) 1; C) 2; D) N.L. f..........

1/g $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{16x^{12} + x^7 + 5}}{x^3 - 7x + 3} =$?:
A) 0; B) 1; C) 2; D) 16; E) $+\infty$; F) N.L.; G) egyik sem. g..........

1/h Konvergens-e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[2022]{n}}$? h..........

1/i $\lim\limits_{y\to x} \dfrac{y^n - x^n}{y - x} =$? A) $ny^{n-1}x$; B) $(n-1)y^n$; C) nx^{n-1}; D) nx^n. i..........

1/j $(\log\log x)' =$? j..............................

1/k Ha $f(2) = 1$, $f'(2) = 0$ és $f''(2) = -1$, akkor a 2-ben az f-nek
A) lok. minimuma; B) lok. maximuma; C) inflexiós pontja van. k..........

1/l Igaz-e, hogy ha f differenciálható $\mathbb{R}$-en, $f'(0) = 3$ és $f'(13) = 1$
akkor $\exists c \in \mathbb{R}$ amire $f'(c) = e$? l..........

1/m Szigorúan konvex-e $\mathbb{R}$-en az $f(x) = x^4 + e^x$ függvény? m..........

1/n $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} =$? A) 0; B) 1/2; C) 1; D) 2; E) N.L. n..........

1/o A Hölder egyenlőtlenségben szereplő $p, q > 0$ kitevőkről mit kell
feltenni? A) $p \cdot q > 1$; B) $p^2 + q^2 = 1$; C) $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$; D) egyik sem. o..........

A 2-4 feladatok megoldásakor minden lépést indokolni kell. Csak indokolt válaszokra, részválaszokra adunk pontot.

Minden feladatot **külön lapra** kell írni. Minden lapra kérem, hogy mindenki írja rá a nevét.

2. feladat

(a) Mondja ki és bizonyítsa a Bernoulli-egyenlőtlenséget.
(5 pont)

(b) Mondja ki és vezesse le az $\left(\frac{1}{g}\right)'(a)$-ra vonatkozó differenciálási szabályt.
(5 pont)

(c) Adja meg a $h'(t) = -gt$ differenciálegyenlet összes megoldását és bizonyítsa is, hogy csak ezek a függvények a megoldások.
(5 pont)

3. feladat

Adott $\epsilon > 0$-hoz alkalmas $\delta > 0$-t keresve mutassa meg, hogy az $f(x) = x^2 + 8x$ függvény folytonos az $a = 2$ pontban! (10 pont)

4. feladat

(a)

Mondja ki és bizonyítsa a függvények határértékére vonatkozó átviteli elvet, valamint a függvényhatárértékre és kompozícióra vonatkozó tételt!
(10 pont)

(b)

Mondja ki és bizonyítsa azt a tételt, mely szükséges és elégséges feltételt ad a konvexitásra a grafikon és az érintő egymáshoz való viszonya segítségével.
(10 pont)

Várható pontozás: 0-19 pont elégtelen, 20-29 pont elégséges, 30-39 pont közepes, 40-49 pont jó, 50-63 pont jeles.