Analízis vizsgadolgozat minta

(Ez egy korábbi tanév vizsgadolgozata. Az idei évben is hasonló stílusú, de részleteiben eltérő vizsgadolgozatok lesznek.)

**I. mat. tanár analízis vizsgadolgozat, 2002. június 25.**

A dolgozat megírására 120 perc áll rendelkezésre. Semmilyen segédeszköz nem használható. Minden feladat megoldását **külön lapra** kell írni. A válaszokat **indokolni** kell. Indoklás nélküli válaszokra nem jár pont. Az előadáson elhangzott tételekre bizonyítás nélkül lehet hivatkozni, kivéve ha a tétel bizonyítása a kérdés.

Jó munkát!

**1. feladat**

(a) Definiálja a konvex függvény fogalmát! (2 pont)

(b) Mi a definíciója annak, hogy $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$? (2 pont)

(c) Mondja ki a Jensen egyenlőtlenséget! (2 pont)

(d) Számolja ki a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$ határértéket! (1 pont)

(e) A $c$ paraméter mely értékére lesz az $f(x) = \begin{cases} x\left\{\frac{1}{x}\right\} & \text{, ha } x \neq 0 \\ c & \text{, ha } x = 0 \end{cases}$ függvény folytonos 0-ban? (ahol $\{y\}$ az $y$ szám törtrészét jelöli) (1 pont)

(f) Igaz-e, hogy két páros függvény szorzata mindig páros? (1 pont)

(g) Igaz-e, hogy két páratlan függvény szorzata mindig páratlan? (1 pont)

(h) Legyen $f$ olyan folytonos függvény a $[0,1]$ intervallumon, amire $f(0) = 1$ és $f(1) = 0$. Bizonyítsa be, hogy van olyan $c \in (0,1)$, amire $f(c) = c$. (2 pont)

(i) A mindenhol értelmezett $f$ függvényről azt tudjuk, hogy van olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden $x, y$-ra $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Következik-e ebből, hogy $f$ folytonos? (1 pont)

(j) A mindenhol értelmezett $f$ és $g$ függvényekről azt tudjuk, hogy minden $x$-re $f(x) \geq g(x)$, valamint, hogy $g(x)$ monoton nő és $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Következik-e ezekből, hogy $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$? (1 pont)

(k) A mindenhol értelmezett $f$ és $g$ függvényekről azt tudjuk, hogy minden $x$-re $f(x) \geq g(x)$, valamint, hogy $g(x)$ monoton nő és $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Következik-e ezekből, hogy $f(x)$ monoton? (1 pont)

**2. feladat**

(a) Definiálja azt, hogy $f$ **nem** differenciálható $b$-ben? (2 pont)

(b) Mondja ki a Cauchy középértéktételt! (2 pont)

(c) Mondja ki az inverz függvény differenciálási szabályát! (2 pont)

(d) Deriválja a $\sqrt{e^x}$, és az $\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{\log x}$ függvényeket! (1+1 pont)

(e) Bizonyítsa be, hogy $[0,\infty)$-n $e^x > x$! (1 pont)

(f) Melyek azok a mindenhol értelmezett $f$ függvények, amelyekre minden $x$-re $f''(x) = 0$? (2 pont)

(g) Adjon elégséges feltételt arra, hogy $b$ inflexiós pontja $f$-nek, ha $f$ háromszor differenciálható $b$-ben! (2 pont)

(h) Legyen $f$ differenciálható a $b$ pontban. Az alábbi állítások közül melyikből következik a másik:

- $f$ lokálisan nő $b$-ben
- $f'(b) \geq 0$ (1+1 pont)

**3. feladat**

Végezze el a teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}$ függvényre, és vázolja a grafikont! (10 pont)

**4. feladat**

(a) Mondja ki és bizonyítsa be a Lagrange középértéktételt! (10 pont)

(b) Az $f$ és $g$ mindenhol értelmezett függvényekről tudjuk, hogy minden $x$-re $f(x) \leq g(x)$, és hogy létezik véges határértékük végtelenben. Bizonyítsa be, hogy $\lim_{x\to\infty} f(x) \leq \lim_{x\to\infty} g(x)$! (10 pont)