Analízis vizsgadolgozat minta

(Ez egy korábbi tanév vizsgadolgozata. Az idén is hasonló stílusú, de részleteiben eltérő vizsgadolgozatok lesznek.)

II. mat. tanár analízis vizsgadolgozat-minta

A dolgozat megírására 120 perc áll rendelkezésre. Semmilyen segédeszköz nem használható. Minden feladat megoldását **külön lapra** kell írni. A válaszokat **indokolni** kell. Indoklás nélküli válaszokra nem jár pont. Az előadáson elhangzott tételekre bizonyítás nélkül lehet hivatkozni, kivéve ha a tétel bizonyítása a kérdés.

1. feladat (a) Mit nevezünk egy f függvény $[a,b]$ intervallumhoz és F felosztáshoz tartozó felső összegének? A kifejezésben szereplő összes betű jelentését magyarázza el! (3 pont)

(b) Melyik állítás igaz? (3 pont)

(b1) Ha f monoton $[a,b]$-n, akkor f integrálható $[a,b]$-n.

(b2) Ha f integrálható, akkor f monoton vagy csak véges sok pontban szakad.

(b3) Az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ \frac{1}{x}, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

függvény integrálható $[0,1]$-en.

(c) Mondja ki a Wallis-formulát! (1 pont)

(d) Mondja ki a helyettesítéses integrálás szabályát határozott integrálra! (2 pont)

(e) Melyik állítás igaz? (3 pont)

(e1) Ha f integrálható $[a,b]$-n, akkor f-nek van primitív függvénye $[a,b]$-n.

(e2) Ha f integrálható $[a,b]$-n, akkor f-nek van integrálfüggvénye $[a,b]$-n.

(e3) Ha f-nek van primitív függvénye, akkor f Darboux-tulajdonságú.

(f) Mondja ki a Taylor-formulát a Lagrange-féle maradéktaggal! (3 pont)

2. feladat

(a) Mutassa meg, hogy sh x invertálható, és számítsa ki sh x inverzének a deriváltját! (5 pont)

(b) Konvergens-e $\int_0^\infty (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})\, dx$? (5 pont)

(c) Bizonyítsa be, hogy $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ divergens! (5 pont)

3. feladat

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}} + 2}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}} + \mathrm{e}^{2\mathrm{x}}}\, dx = ?$$

(10 pont)

4. feladat

(a) Bizonyítsa be, hogy az integrálfüggvény folytonos! (10 pont)

(b) Mondja ki és bizonyítsa be az integrálkritériumot! (10 pont)